**Теория вероятностей и математическая статистика**

**Сочетания. Размещения. Перестановки**

# Элементы комбинаторики

Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

## Основная формула комбинаторики

Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа состоит из ni элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением N=n1\*n2\*n3\*...\*nk.

**Пример 1.** Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n1 элементов, а вторая - из n2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы? Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n2. Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n2. Так как в первой группе всего n1 элемент, всего возможных вариантов будет n1\*n2.

**Пример 2.** Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?
Решение: n1=6 (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), n2=7 (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), n3=4 (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6).
Итак, N=n1\*n2\*n3=6\*7\*4=168.

В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т.е. n1=n2=...nk=n можно считать, что каждый выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно nk. Такой способ выбора в комбинаторики носит название**выборки с возвращением.**

**Пример 3.** Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?
Решение. Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит N=5\*5\*5\*5=54=625.

Рассмотрим множество, состоящие из n элементов. Это множество в комбинаторике называется **генеральной совокупностью**.

## Число размещений из n элементов по m

**Определение 1.** Размещением из **n** элементов по **m** в комбинаторике называется любой **упорядоченный набор** из **m** различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в **n**элементов.

**Пример 4.**Различными размещениями из трех элементов {1, 2, 3} по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3),(3, 2). Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком.

Число размещений в комбинаторике обозначается Anm и вычисляется по формуле:



**Замечание:** n!=1\*2\*3\*...\*n (читается: "эн факториал"), кроме того полагают, что 0!=1.

**Пример 5**. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?
*Решение:* т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:



**Определение 2. Сочетанием** из **n** элементов по **m** в комбинаторике называется любой **неупорядоченный набор** из **m** различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в **n**элементов.

**Пример 6**. Для множества {1, 2, 3}сочетаниями являются {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

## Число сочетаний из n элементов по m

Число сочетаний обозначается Cnm и вычисляется по формуле:



**Пример 7.**Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:



## Перестановки из n элементов

**Определение 3. Перестановкой** из **n** элементов называется любой **упорядоченный набор** этих элементов.

**Пример 7a.** Всевозможными перестановками множества, состоящего из трех элементов {1, 2, 3} являются: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число различных перестановок из n элементов обозначается Pn и вычисляется по формуле Pn=n!.

**Пример 8.** Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

Решение:эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется P7=7!=1\*2\*3\*4\*5\*6\*7=5040 способов осуществить расстановку книг.

**Обсуждение.**Мы видим, что число возможных комбинаций можно посчитать по разным правилам (перестановки, сочетания, размещения) причем результат получится различный, т.к. принцип подсчета и сами формулы отличаются. Внимательно посмотрев на определения, можно заметить, что результат зависит от нескольких факторов одновременно.

Во-первых, от того, из какого количества элементов мы можем комбинировать их наборы (насколько велика генеральная совокупность элементов).

Во-вторых, результат зависит от того, какой величины наборы элементов нам нужны.

И последнее, важно знать, является ли для нас существенным порядок элементов в наборе. Поясним последний фактор на следующем примере.

**Пример 9.**На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?
Решение: В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числа**сочетаний**из 20 элементов по 5.

Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно 5! вариантов **перестановок**, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом **размещений** из 20 элементов по 5.

**Домашнее задание**
1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?.

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

3. В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

4. Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?

5. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

6. Из трех математиков и десяти экономистов надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и шести экономистов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение домашнего задания отправлять по адресу : irina\_trishenkova@mail.ru