Математика

курс лекций
для студентов 1 курса специальности 19.02.11 Технология продуктов питания из растительного сырья

СОДЕРЖАНИЕ

Курс лекций по математике включает краткие теоретические сведения по следующим темам:

1. Функции, их свойства и графики;

2. Свойства степени и логарифмов;

3. Алгебраические преобразования;

4. Решение линейных уравнений и неравенств;

5. Решение квадратных уравнений и неравенств;

6. Решение систем линейных уравнений и неравенств;

7. Решение показательных и логарифмических уравнений. Решение показательных и логарифмических неравенств;

8. Тригонометрические преобразования;

9. Решение простейших тригонометрических уравнений;

10. Производная функции. Приложение производной к исследованию и построению графиков функций;

11. Приложение определенного интеграла к решению задач.

12. Свойства и площади плоских фигур;

13. Свойства, площади поверхностей и объемы многогранников;

14. Свойства, площади поверхностей и объемы круглых тел;

Также в пособии представлены основные формулы, упражнения с решениями, задачи для самостоятельного решения.

Объем материала, и уровень сложности соответствует требованиям учебной программы к знаниям, умениям и навыкам по математике учащихся, окончивших 11 классов общеобразовательной школы.

РАЗДЕЛ 1

Линейная функция, ее свойства и график. Решение линейных уравнений и неравенств. Решение систем линейных уравнений и неравенств

1.1. Линейная функция у = кх + в, ее свойства и график.

Определение: Функция вида *у = кх +в,* где *к* и *в* действительные числа называется линейной функцией.

к - угловой коэффициент, в - свободный коэффициент

$$к = tg\alpha$$

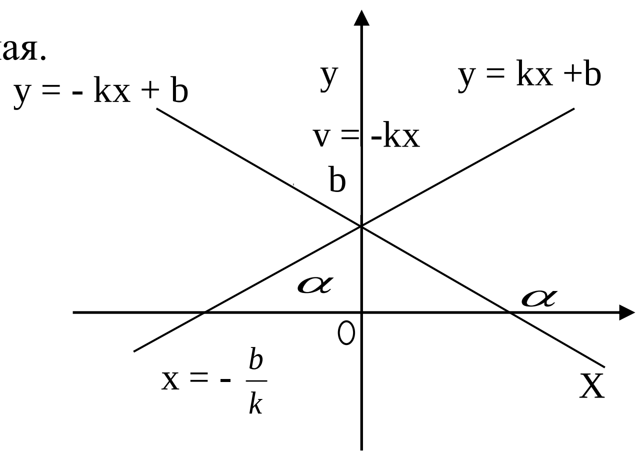
α - угол наклона прямой к положительному направлению оси ОХ

Для построения графика необходимы две точки А(0; *в*) и В ($-\frac{b}{k}$)

Если угловой коэффициент положительный, то угол наклона прямой к оси ОХ острый, если угловой коэффициент отрицательный, то угол наклона прямой к оси ОХ тупой.

Свойства линейной функции

1. Область определения функции любое действительное число.
2. Область значений функции любое действительное число.
3. Возрастает, если $к > 0$, убывает, если $к < 0$. Не является монотонной, если *к = 0*
4. Функция общего вида, т.е. ни четная, ни нечетная.
5. Корень функции х = $-\frac{b}{k}$.
6. Графиком функции является прямая.



1. 2. Функция вида у = кх, ее свойства и график.

Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат О (о;о). Для построения графика достаточно двух точек А (1; к) и О (0; 0).

Свойства функции y=-kx и y=kx

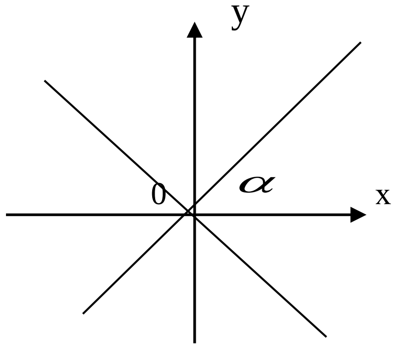
1.Область определения функции x любое действительное число.

2.Область значения функции y любое действительное число.

3. Функция нечетная.

4. Возрастает, если $к\rangle 0$, убывает, если $к\langle 0$.

5. Корень функции x = 0.



Пример 1. Исследовать функцию и построить ее график ***У = 2 x – 4.***

Решение: 1. Область определения x - любое действительное число.

2. Область значений y - любое действительное число.

3. У (- x) = 2 (- x) – 4 = - 2 x – 4 - функция общего вида.

4. Корень функции x = 2.

5. Функция возрастает на всей области определения.

6. Графиком функции является прямая, проходящая через точки (0; - 4) (2; 0).

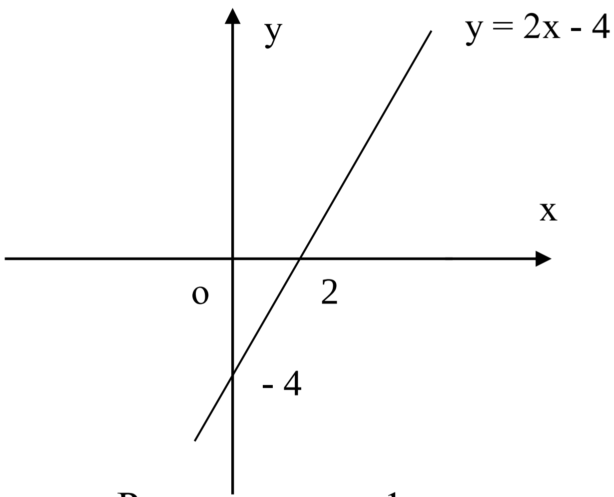


Рис. к примеру 1

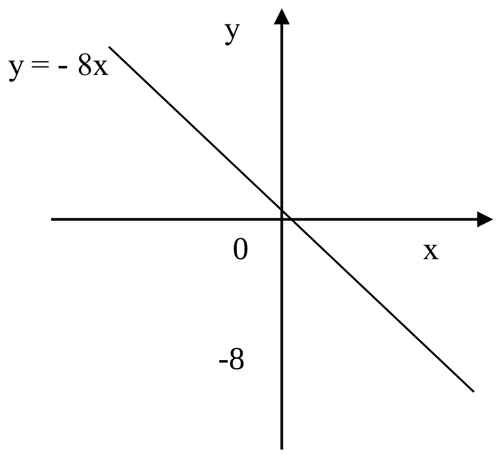


Рис. к примеру 2

Пример 2. Исследовать функцию и построить ее график ***У = - 8 x*** .

Решение: 1. Область определения x – любое действительное число.

2. Область значений y – любое действительное число.

3. y (- x) = - 8 (- x) = 8 x функция четная , значит ее график симметричен относительно начала координат.

4. Корень функции x = 0.

5. Функция убывает на всей области определения

6. Графиком функции является прямая, проходяший через начало координат.

2. Решение линейных уравнений и неравенств.

Определение Уравнение вида ***ах + в = 0*** называется линейным уравнением.

Решить линейное уравнение – это значит найти его корни или доказать, что их нет.

Корень уравнения – это такое число, при подстановки которого в уравнение оно обращается в верное равенство.

Корень линейного уравнения: х = - $\frac{b}{a}$, если $a\rangle 0$ и $b\rangle 0$ или $a\langle 0$ и $b\langle 0$,

х = $\frac{b}{a}$, если $a\langle 0$ и $b\ \rangle 0$ или $a\ \rangle 0$ и $b\langle 0$.

Во всех случаях решение более сложных линейных уравнений сводится к простейшему.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{5x-4}{2} = \frac{10x+1}{7}$

Решение: 1. Наименьший общий знаменатель двух дробей 14

2. Дополнительный множитель первой дроби 7, второй дроби 2

3. Уравнение приводим к виду $\frac{7(5x-4)}{14} = \frac{2(10x+1)}{14}$

4 Умножаем обе части уравнения на 14

5. Решаем уравнение 35х – 28 = 20 х + 2

35х – 20х = 2 + 28

15х = 30

х = 30 : 15

х = 2

Ответ: х = 2

Неравенства вида $ax + b\rangle 0$, $ax + b\langle 0$, $ax + b\leq 0$, $ax + b\geq 0$ называются линейными неравенствами. Решить неравенство – это значит найти множество его решений. Решение неравенства – это такое число, при подстановки которого в неравенство оно обращается в верное числовое неравенство.

Основные свойства неравенств.

1. Если $a\rangle b$, то a - $b\ \rangle 0$ и $b\langle a$.

2. Если $a\langle b$, то $a - b\ \langle 0$ и $b\ \rangle a$.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменяется на противоположный.

4. При переносе числа из одной части неравенства в другую знак числа изменяется на противоположный.

5. Минус, стоящий перед дробью означает то же самое, что и минус, стоящий перед скобками, то есть в ходе преобразований знак каждого слагаемого, стоящего в числителе дроби, изменяется на противоположный.

6**.** Обе части неравенства можно возводить в одну и ту же натуральную степень, при условии, что правая и левая части положительны.

Множество решений неравенства изображается на числовой прямой.

Для неравенства строгого знака ($<$ или $>$) точки на оси светлые, а для неравенств нестрогого знака ($\le$ или $\ge$) точки на оси темные.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{2x-1}{5}-4>x-\frac{3x+1}{5}$

Решение: 1. Приводим обе части неравенства к общему знаменателю и получаем неравенство вида $\frac{2x-1-20}{5}>\frac{5x-3x-1}{5}$.

2. Приводим подобные слагаемые в числителях каждой из дробей и умножаем обе части неравенства на 5, число 5 положительное, поэтому знак неравенства не изменится. Получаем неравенство вида: 2х – 21 $>2x-1$, решая это неравенство, получаем $0>20$, НЕРАВЕНСТВО РЕШЕНИЙ НЕ ИМЕЕТ, так как обратилось в неверное числовое неравенство.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{5x-7}{6}-\frac{x+2}{7}>2$

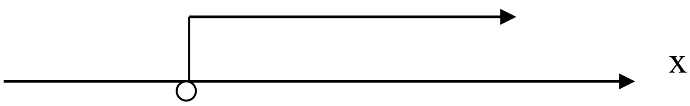
Решение: 1. Приводим обе части неравенства к общему знаменателю 42, тогда неравенство имеет вид: $\frac{7(5x-7)}{42}-\frac{6(x+2)}{42}>2$.

2. Умножаем обе части неравенства на 42 , число 42 положительное, значит, знак неравенства не изменится. Получаем неравенство вида 35х – 49 – 6х – 12 >84

3. Приводим подобные слагаемые, получаем 29х >145. Разделим обе части неравенства на 29, число 29 положительное, значит, знак неравенства не изменится.

4. Получаем х$>\frac{145}{29}$ или х >5.

5. Изображаем решения неравенства на числовой прямой.



5

Ответ: x 〉5

3. *Решение систем линейных уравнений и неравенств*

Определение: Система уравнений вида:

$$\begin{cases} a1x + b1y = c1 \\ a2x + b2y = c2 \end{cases}$$

называется линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными. Действительные числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются коэффициентами при неизвестных, числа c_1, c_2 –свободными коэффициентами.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Методы решения:

1. Метод подстановки
2. Метод алгебраического сложения.
3. Графический метод.

Если в системе уравнений коэффициенты при неизвестных x и y пропорциональны, а свободные коэффициенты не равны нулю, то система решений не имеет. Если же коэффициенты при неизвестных x и y пропорциональны, а свободные коэффициенты равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример 6: Решить систему уравнений

Способ подстановки

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{3} = 6 & (1) \\ \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{x-y}{3} & (2) \end{cases}$$

Решение: 1. Умножаем обе части уравнения (1) на 6, а обе части уравнения (2) на 12, тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 3(x+y) + 2(x-y) = 36 \\ 3(x+y) = 4(x-y) \end{cases}$$

2. После преобразований система имеет вид:

$$\begin{cases} 5x - y = 36 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$$

4. Выражаем из второго уравнения x и подставляем его в первое уравнение, получаем:

$x = 7y$, $35y + y = 36$ или $y = 1$.

5. Найденное значение y подставляем в выражение для x, тогда $x = 7$.

6. Чтобы исключить вычислительные ошибки в системе уравнений рекомендуется делать проверку, путем подстановки найденных значений x и y в каждое уравнение или в то уравнение, из которого не выражали переменную x или y.

Проверка:

$$\begin{cases} \dfrac{7+1}{2} + \dfrac{7-1}{3} = 6;\ 4 + 2 = 6\ (\text{В}) \\ \dfrac{7+1}{4} = \dfrac{7-1}{3}\quad ;\ 2 = 2\ (\text{В}) \end{cases}$$

Ответ: $x = 7$, $y = 1$.

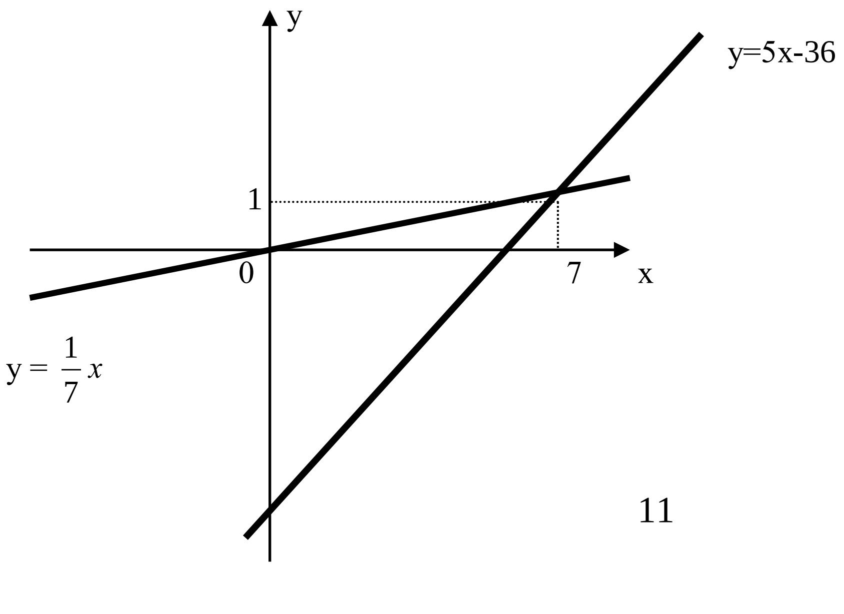
Графический способ.

1. Приведем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} y = 5x - 36 \\ y = \dfrac{1}{7}x \end{cases}$$

2. Построим графики полученных функций и найдем координаты точки их пересечения.

Чтобы точно найти координаты точки пересечения, необходимо приравнять функции друг к другу. Тогда, $5x-36 = \frac{1}{7}x$, отсюда $x=7$. Для того чтобы найти значение y, необходимо найденное значение x подставить в любое уравнение системы.

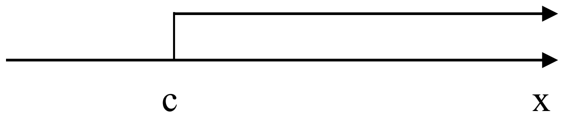


Система линейных неравенств имеет вид:

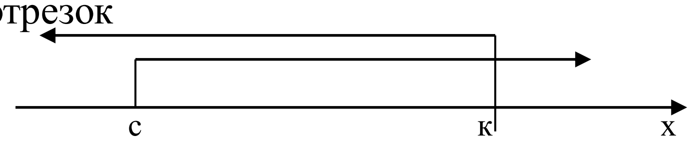
$$\begin{cases} a_1x+b_1\ \ V\ 0 & \text{“V’’ - обозначает любой знак строго или нестрого неравенства} \\ a_2\,x+b_2\ V\ 0 \end{cases}$$

При решении линейного неравенства возможны следующие виды интервалов:

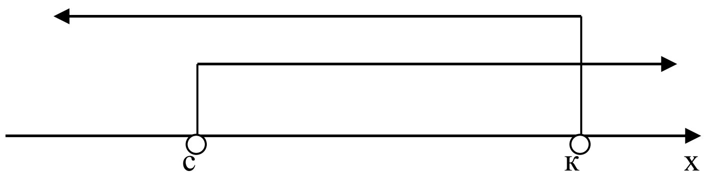
1. Числовой луч



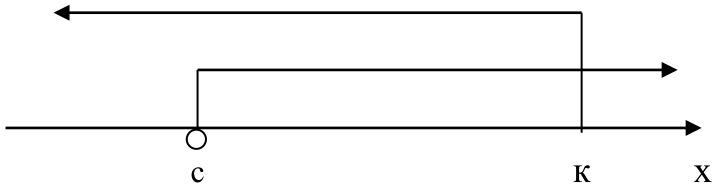
2. Числовой отрезок



3. Открытый интервал



4. Полуинтервал



Решить систему неравенств - значит найти множество общих решений двух или нескольких неравенств. Множество решений системы неравенств – это пересечение множеств решений каждого неравенства, входящего в систему. Если пересечения множеств нет, то система неравенств решения не имеет.

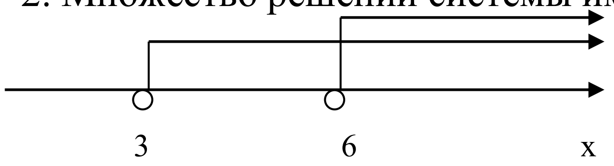
Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы.

Для записи и изображения решения системы неравенств необходимо учитывать строгие и нестрогие знаки неравенства (строгие знаки обозначают светлыми точками, нестрогие - темными)

Пример 7. Решить систему неравенств: $\begin{cases} 3\,x - 18 > 0 \\ 4\,x - 12 > 0 \end{cases}$

Решение: 1. Приводим систему к виду: $\begin{cases} x > 6 \\ x > 3 \end{cases}$

2. Множество решений системы имеет вид:



Ответ: $x > 6$

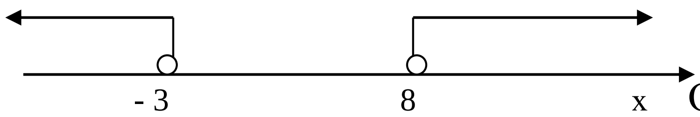
Пример 8: Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x > 16 \\ x < -3 \end{cases}$$

Решение: 1. Приводим систему к виду:

$$\begin{cases} x > 8 \\ x < -3 \end{cases}$$

2. Множество решений системы имеет вид

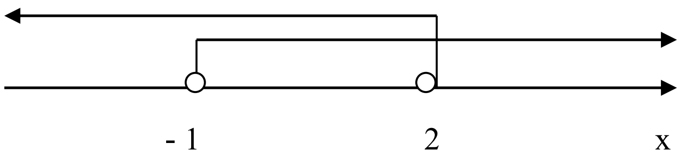


Ответ: система решений не имеет.

Пример 9: Решить систему неравенств: $\begin{cases} 2x - 1 < 3 \\ 2x - 1 > -3 \end{cases}$

Решение: 1. Приведем систему неравенств к виду: $\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$

2. Множество решений системы неравенств имеет вид:



Ответ: $-1 < x < 2$.

Во всех случаях сложные неравенства приводятся к простым неравенствам.

Самостоятельная работа № 1.
Тема: Решение линейных уравнений и неравенств и их систем

1. Построить графики функций:

а) у = 2 х = 4,б) у = 2 х – 4, в) у = - 2 х + 4, г) у = - 2 х – 4, д) у = 2 х, е) у = - 2 х.

2. Решить уравнения:

а) 3(х+1)(х+2)-(3х-4)(х+2) = 36

б) 2(3х-1)(2х+5)-6(2х-1)(х+2) = 48

в) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{6}-\frac{2x}{9}=13$

г) $\frac{8x-5}{4}=\frac{10x+1}{8}$

д) $\frac{5y-4}{2}=\frac{16y+1}{7}$

е) $\frac{14+3x}{8}-\frac{1-9x}{5}=0$

ж) $\frac{x+(x-5)}{11}=2$

з) $\frac{2x-(3-x)}{2}=3\frac{3}{8}$

и) $\frac{3-2x}{6}=\frac{2x+8}{9}$

к) $\frac{5x-7}{6}-\frac{4x+2}{7}=2$

3. Решить неравенства:

а) $\frac{3x+6}{4}=\frac{x}{4}+\frac{x+2}{2}$

б) $\frac{2x-1}{5}-4\rangle\frac{1-3x}{5}+x$

в) 5х + 1 $\geq 2(x-1)+3x+3$

г) $\frac{x+44}{4}-x\leq 2-\frac{x}{2}$

д) $\frac{4-3x}{8}-\frac{5-2x}{12}\langle 1$

е)5 (х-1) – 3 〉6 (х + 2)

ж) 2х –3 〈 7х – 2 (х – 3)

з) 2 (х- 2) (2 + х)〉19 – (2 х – 3)

к) $\frac{2x-5}{4}-\frac{3-2x}{5}\langle 1$

4. Решить системы уравнений (графически и аналитически):

а) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x = -y + 5 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10x + 8y = -11 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$

5. Решить системы неравенств

а) $\begin{cases} 5x - 2 \geq 6x + 1 \\ 4 - 3x \rangle 2x - 6 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x \rangle 9 - 4x \\ 3(5 - 2x) - 1 \geq 4 - 5x \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12y - 3(y + 2) \geq 7y - 5 \\ 13y + 6 \leq (y - 5)2 + 3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7}\langle\frac{3x-8}{4} \\ \frac{6-x}{5}-1\langle\frac{14x-3}{2} \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x - 4 \rangle x - 3 \\ -2x + 11 \rangle x + 1 \\ 12 - 3x \rangle 4 - 5x \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x \leq 5 - 6x \\ -3x + 1 \leq 4x - 1 \\ 7 - 2x \rangle 2x + 9 \end{cases}$

Раздел 2.

Квадратичная функция $y = a\,x^2 + вx + c$.
Решение квадратных уравнений и неравенств. Метод интервалов

1. Определение: Функция вида $y = a\,x^2 + в\,x + c$ называется квадратичной функцией. Графиком такой функции является парабола с вершиной в точке с координатами:

$\mathbf{x_0 = -\frac{в}{2a}}$, $\mathbf{y_0 = y\,(x_0)}$. Точки пересечения графика с осями координат находятся по формулам: с осью абсцисс (О x) : $x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$, с осью ординат (Оу) у = у (0) = с.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом и может принимать следующие значения: 1. D = 0 (парабола пересекает ось Ох в одной точке)

$x_o = -\frac{в}{2a}$

2. $D > 0$ (парабола пересекает ось Ох в двух точках):

$x_1 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-в - \sqrt{D}}{2a}$

3. $D < 0$ (парабола не пересекает Ось Ох и лежит в первой или второй координатных четвертях, если первый коэффициент положительный, в третьей и четвертой – если первый коэффициент отрицательный)

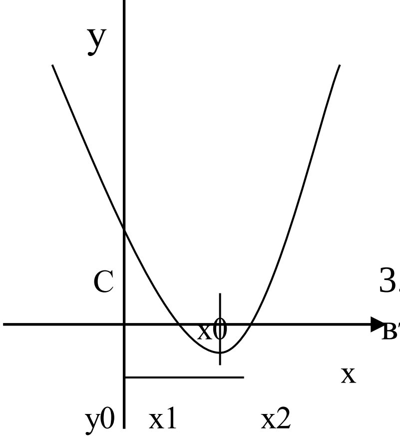


график квадратичной функции для 1 и 2 значений дискриминанта

2. Определение: Уравнение вида $\mathbf{a\,x^2 + вx + c = 0}$ называется квадратным. Корни квадратного уравнения находятся по формуле: $\mathbf{x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}}$, где $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$. Если D = 0, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{в}{2a}$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-в - \sqrt{D}}{2a}$

Если $D < 0$, то уравнение действительных корней не имеет

3. Неполные квадратные уравнения.

1.$\mathbf{a\,x^2 + вx = 0\ ,\ c = 0}$.Уравнение такого вида решается методом вынесения общего множителя за скобки и приведения к двум линейным уравнениям вида:

$x = 0$, $x = -\frac{в}{a}$.

2.**$ax^2 + c = 0$, $в = 0$**.Уравнение такого вида приводится к простейшему квадратному уравнению **$x^2 = -\frac{c}{a}$** и имеет решение при с $\rangle 0$ или а $\langle 0$.

3.**$ax^2 = 0$,$c = 0$, $в = 0$**. Приводятся к виду **$x^2 = 0$** и имеют один корень х = 0.

4.**$x^2 = к$, $a = 1$** имеет корни вида **$x_{1,2} = \pm\sqrt{к}$** и имеет решение только в случае положительного значения к.

4. *Приведенные квадратные уравнения.*

Квадратное уравнение вида **$x^2 + p\ x + q = 0$** называется приведенным квадратным уравнением. Корни такого уравнения находятся по формуле:

$x_{1,\ 2}$ = $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ при неотрицательном подкоренном выражении (дискриминанте).

Корни приведенного квадратного уравнения можно найти по теореме Виета.

Теорема: Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту (р), взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному коэффициенту (q). $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

5.*Разложение квадратного трехчлена на множители*.

$y = ax^2 + вx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,где x_1 и x_2 –корни квадратного трехчлена, которые находятся по формуле корней квадратного уравнения при условии, что у = 0.

6. *Выделение полного квадрата.*

$y = ax^2 + вx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $x_0 = -\frac{в}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

7. Решение квадратных уравнений и уравнений, приводимых к ним.

Пример 10: Решить уравнения а) $3x^2 - 2x - 1 = 0$, б) $x^2 - 2x - 3 = 0$, в) $x^4 - 7x^2 - 12 = 0$,

г) $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3$

Решение: а) корни уравнения находим по формуле $x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$, где а = 3,

в = - 2, с = - 1, отсюда $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$.

б) по теореме Виета $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -3$, тогда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

в) $x^2 = к \rangle 0$, тогда уравнение имеет вид: $к^2 - 7к + 12 = 0$, его корни $к_1 = 4$, $к_2 = 3$, оба корня удовлетворяют решению $x^2 = 4$, отсюда $x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, $x^2 = 3$, отсюда $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

г) 1. Находим область допустимым значений переменной х:

$$\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$, отсюда $x \neq -2$, $x \neq 3$.

2. Перенесем все слагаемые в одну часть и приведем к общему знаменателю.

О.З. (х + 2) (х – 3), дополнительный множитель первой дроби (х – 3), второй

(х + 2), третьей (х + 2) (х – 3).

3. После преобразований уравнение имеет вид: $\frac{3x^2 - 2x - 1}{(x+2)(x-3)} = 0$.

Умножать обе части уравнения на общий знаменатель нельзя!

Поэтому учитывая область допустимых значений переменной х, рассматриваем числитель $3x^2 - 2x - 1 = 0$, так как знаменатель дроби не может быть равным нулю. Корни числителя будут являться корнями уравнения: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$.

8. ***Решение квадратных неравенств. Метод интервалов.***

Суть метода состоит в том, чтобы определить промежутки знакопостоянства множителя, который содержит квадратный трехчлен. Для этого необходимо

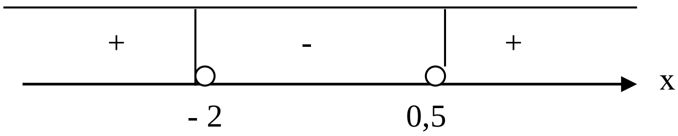
1. Найти корни квадратного трехчлена,
2. Нанести эти корни на числовую ось, с учетом знака самого квадратного неравенства,
3. Разложить квадратный трехчлен на множители,
4. Определить знаки каждого множителя и всего произведения,
5. Выписать в ответ интервалы соответствующие знаку квадратного неравенства.

Пример 11. Решить неравенство $2x^2 + 3x - 2 \quad 0$

Решение 1. Находим корни квадратного трехчлена $2x^2 + 3x - 2 = 0$, отсюда $x_1 = 0,5$, $x_2 = -2$.

2. Раскладываем квадратный трехчлен на множители 2 (x - 0,5) (x + 2) 0.

3. Наносим полученные точки на числовую ось, с учетом знака неравенства, и исследуем знак каждого множителя и произведения в целом



4. Выбираем те интервалы, в которых квадратный трехчлен отрицателен

Ответ: $-2 \langle x \langle 0,5$.

Если квадратный трехчлен имеет один корень, то неравенство можно решить представив трехчлен в виде: $a(x - x_0)^2$

Пример 12: Решить неравенство $4x^2 - 4x + 1 \le 0$.

Решение: Неравенство представляем в виде $4(x - 0,5)^2 \le 0$. Откуда $x \le 0,5$

Если квадратный трехчлен не имеет действительный корней, то его значение положительно при a $\rangle$ 0 и отрицательно при a $\langle$ 0 .

Пример 13: Решить неравенство $6x^2 + 4x + 10 \rangle 0$

Решение: решение неравенства является любое действительное число, так как $a \rangle 0, D \langle 0$

9.Решение дробно - рациональных неравенств методом интервалов.

Для решения дробно – рациональных неравенств методом интервалов необходимо числитель и знаменатель дроби разложить на множители точек. **Независимо от того, каков знак неравенства, корни знаменателя не входят в область определения дроби, поэтому точки, изображающие эти корни на числовой оси светлые.**

Пример 14: Решить неравенство $\dfrac{x^2 - x - 12}{x - 2} \ge 0$

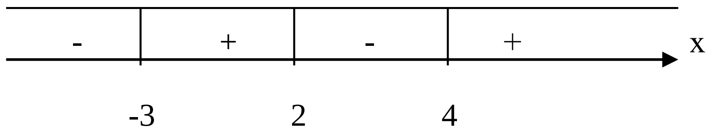
Решение: 1. Находим корни числителя по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -12, x_1 + x_2 = 1$. Тогда корни равны $+ x_1 = 4, x_2 = -3$

2. Корень знаменателя x = 2.

3. Раскладываем на множители $\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-2} \ge 0$

Умножать обе части неравенства на знаменатель нельзя!

4. Отметим, полученные корни на числовую ось и исследуем знак каждого промежутка



Ответ: -3 $\leq$ x $\langle$ 2, x $\geq$ 4.

Самостоятельная работа № 2.
Тема: Решение квадратных уравнений и неравенств

1.Решить уравнения:

а) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$

б) $\frac{x(2-x)}{3}=\frac{(2-x)(2+x)}{2}-5$

в) $\frac{3}{x+2}=4+\frac{3}{x-1}$

г) $-9x^2+4x+13=0$

д) $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x^2-7x+12}=\frac{1-x}{x-4}$

е) $5+\frac{2}{x-2}=\frac{17}{x+3}$

ж) $x^2+6x+5=0$

з) $2x^2+3x-2=0$

и) $20+8x-x^2=0$

к) $6x^2+x+1=0$

2. Решить неравенства:

а) (x+15) (x + 4)$\langle$0

б) $(x-5)^2 \rangle 37-(x-10)^2$

в) $(x-3)^2+(x-4)^2-(x-5)^2 \langle\ 17x+24$

г) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}\geq\frac{3x-10}{4}$

д) $-x^2-5x\geq 8$

е) $(x-5)^2(x^2-25)\rangle 0$

ж) $(x=7)^2(x^2-49)\langle 0$

з) $(x-3)^2(x+3)\langle 0$

и) $\frac{2x^2-2x-24}{x-1}\leq 0$

к) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}\rangle 0$

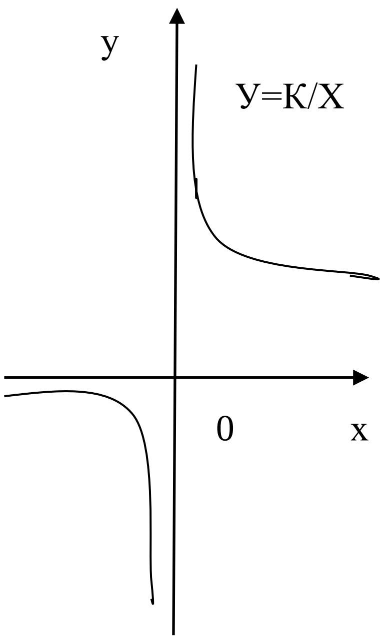
3. Построить графики функций:

а) $y = 2x^2$, б) $y = x^2 - 5x + 6$, в) $y = x^2 - 8x - 33$, г) $y = 2x^2 - x - 3$, д) $y = 8x^2 + 10x$, е) $y = -x^2 - 4x$.

Раздел 3. *Функция вида у = $\frac{к}{x}$, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график*

1. Определение: Функция вида у = $\frac{к}{x}$ называется функцией обратной пропорциональности между переменными х и у. Графиком функции является гипербола, расположенная в первой и третьей квадратных четвертях.

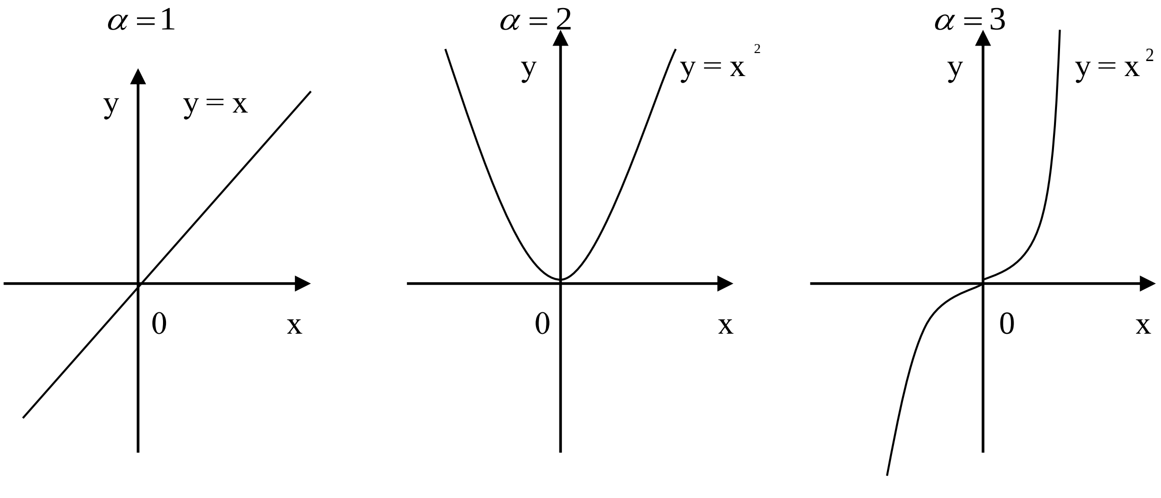
Свойства функции:



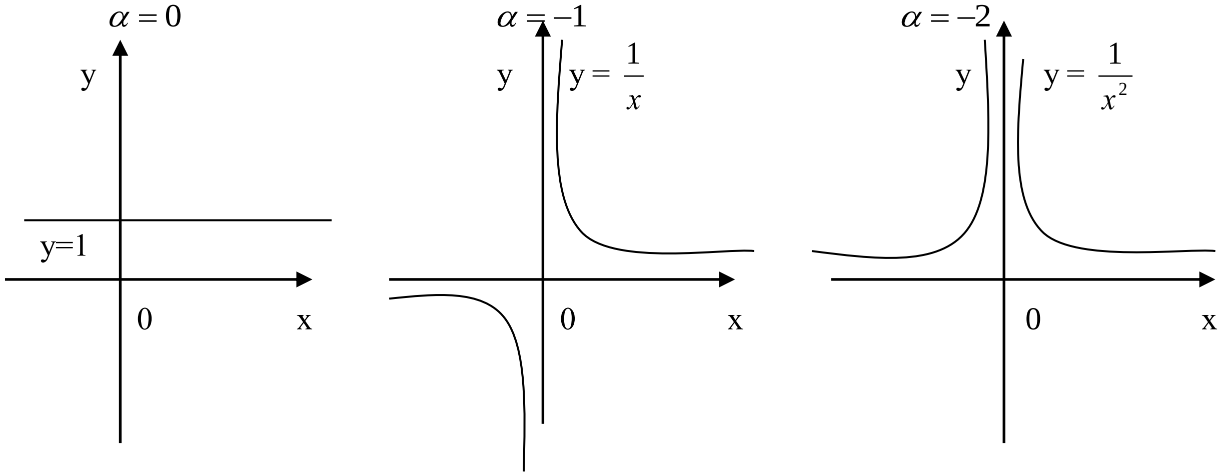
1. Область определения функции х- любое действительное число, кроме нуля.
2. Область значений функции у – любое действительное число, кроме нуля.
3. Функция нечетная у(-х) = -$\frac{к}{x}$ = - у (х).График функции симметричен относительно начала координат точки О(0;0).
4. Корней не имеет.
5. Положительна при х $\rangle 0$, отрицательна при х$\langle 0$.
6. Убывает на всей области определения.
7. Если к $\langle 0$, то свойства функции не изменяются, за исключением свойства монотонности, так как в этом случае функция возрастает на всей области определения.

2.Определение: Функция вида у = х$^{\alpha}$, где х$\rangle 0$, называется степенной функцией х-основание степени, α- показатель степени.

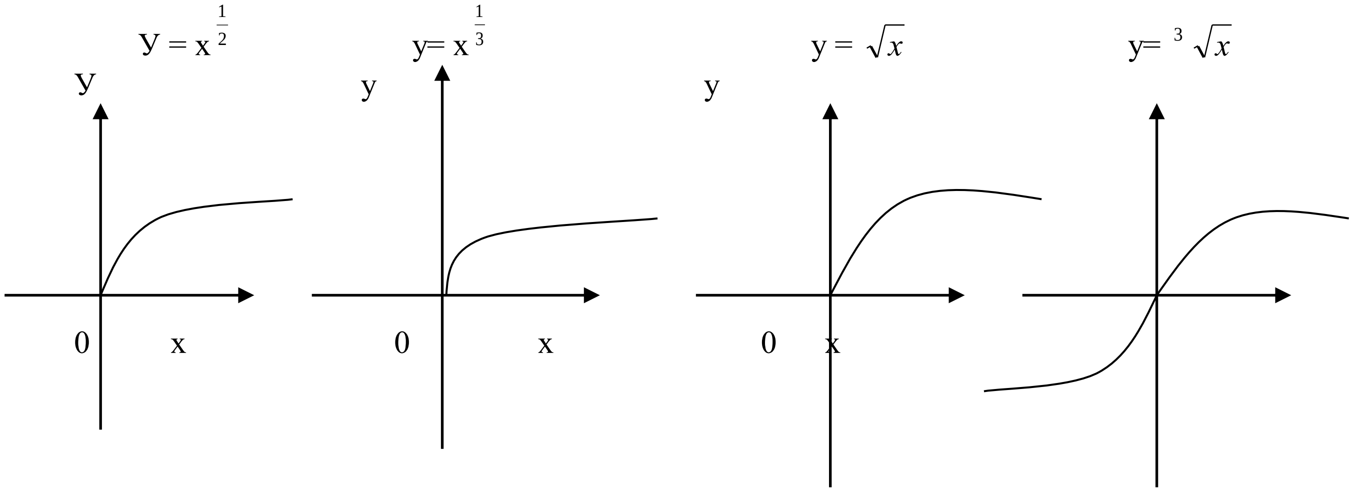
Примеры степенных функций с натуральным показателем.



Примеры степенных функций с целым показателем.



Примеры степенных функций с рациональным показателем.



Раздел 4. ***Степени и логарифмы. Алгебраические преобразования. Решение показательных и логарифмических уравнений. Решение показательных неравенств***

1. Степень числа

Степень действительного числа **a** с натуральным показателем **n** есть произведения **n** сомножителей, каждый из которых равен **a**.

$$a^1 = a \quad ; \quad a^2 = a\,a \quad ; \quad a^n = \underbrace{a\,a\,a\,.......\,a}_{n\ \text{раз}}$$

$$\boxed{a \in R,\ n \in N}$$

a^n **a** - основание степени

n - показатель степени

Показатель степени может быть натуральным, целым или дробным (рациональным) числом. Иррациональные числа в качестве показателя степени не рассматриваются.

Правило знаков

Любая степень положительного числа есть число положительное.

$$\mathbf{a^n \rangle 0,\ если\ a \rangle 0\ и\ n \in R.}$$

Чётная степень отрицательного числа есть число положительное.

$$\mathbf{(-a)^n \rangle 0\ ,\ если\ n\ -\ чётное\ число.}$$

Нечётная степень отрицательного числа есть число отрицательное.

$$\mathbf{(-a)^n \langle 0\ ,\ если\ n\ -\ нечётное\ число.}$$

Нулевой показатель степени

Любое действительное число в нулевой степени равно единице!

$$\mathbf{a^0=1}$$

Отрицательный показатель степени

За степень с отрицательным показателем принимается дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель равен тому же числу, но с положительным показателем равным абсолютной величине (модулю) отрицательного показателя.

$$\mathbf{a^n = \frac{1}{a^n}\ ,\ если\ a \neq 0.}$$

Дробный (рациональный) показатель степени

Степень положительного числа с дробным показателем означает корень, показатель степени которого равен знаменателю, а показатель степени подкоренного числа равен числителю дробного показателя.

$$\mathbf{a^n = \sqrt[n]{a^m}\ ,\ a \rangle 0\ .}$$

Свойства арифметического корня

1. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$, если a $\rangle$ 0, b $\rangle$ 0 .
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если a $\rangle$ 0, b $\rangle$ 0 .
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, если, a $\rangle$ 0 , n $\rangle$ 2 , n $\in N, m \in N$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, если a $\rangle 0, n \rangle 2, m \rangle 2, n \in N, m \in N.$

Действия над степенями

Для степени с любым действительным показателем, кроме иррациональных показателей, справедливы равенства:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \div a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$ $n \in R, m \in R$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b\rangle 0$

6. $a^n \rangle b^n$, если $a\rangle b, a\rangle 0, b\rangle 0$

7. $a^n \langle b^n$, если $a\langle b, a\rangle 0, b\rangle 0$ $n \in N$

Алгебраические преобразования

1. Формулы сокращённого умножения

1. Квадрат суммы двух чисел:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Квадрат разности двух чисел:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. Разность квадратов двух чисел:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

4. Куб суммы и разности двух чисел:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

5. Сумма и разность кубов двух чисел:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Самостоятельная работа № 3
Тема: «Решение задач на свойства степени. Алгебраические преобразования».

1. В пустое место вставьте недостающее слагаемое, чтобы получился квадрат суммы или разности двух чисел.

1) $x^2 + 2x +$ 4) $a^2 -$ $+ 6{,}25$

2) $4a^2 + a +$ 5) $c^2 + 8c +$

3) $x^2 - 6x +$ 6) $9\boldsymbol{y}^2 -$ $+\frac{1}{4}x^2$

2. Разложите на множители

1) $x^2 + 2px + p^2$ 3) $16x^2 - 8xy + y^2$ 5) $x^2y^2 + 1 + 2xy$

2) $-4x^2 + 4x - 1$ 4) $-3a^2 + 30a - 75$ 6) $a^4 - c^4 + c^2 - a^2$

3. Сократите дроби.

1) $\frac{3a^2 - 27a}{a^3 + 3a} =$ 2) $\frac{2a^2 - 8}{a^2 + 4a + 4}$

3) $\frac{25x^2 - x^4}{(5 - x)^2} =$ 4) $\frac{3x^5 - 3x^2}{x^2 + x + 1} =$

4. Найдите числовое значение алгебраического выражения:

$$\frac{2a+2c}{2a^2-2c^2} \quad \textit{при } a=\frac{1}{2} \textit{ и } c=\frac{1}{3}.$$

5. Упростите выражения.

1) $\left(\frac{x}{y-x}-\frac{x}{y+x}\right)\bullet\frac{(x+y)^2}{2x^2}=$ 2) $\left(\frac{1}{a-1}-1-\frac{1}{a+1}\right)\bullet\left(a^2-1\right)=$

3) $\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)\bullet\frac{ac}{a-c}=$ 4) $\sqrt[3]{x^{-3}}=$

5) $\left(\sqrt[4]{y^{-4}}\right)^2=$ 6) $\sqrt[3]{\frac{a^3x^3}{x^{-6}y^3}}\bullet\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}=$

6. Представьте в виде степени числа ***c*** выражения :

1) $c^2\ \ c^3 c^{-2} c^3 : c^4$
2) $(c\, c^2)^3$
3) $(c^4 : c^3)\, c$
4) $c^5 : (c^2 : c)$
5) $1 : c^5$
6) $c^{-2} c^3 : c^4$
7) $(c^2 c^4 c^6)(c^{-3} : c)$
8) $(c^{-1} c^{-3})^{-1}$
9) $(c^2)^{-2}$
10) $c^6 c^6$

6. Представьте число в виде : $\mathbf{c}\bullet\sqrt[n]{a}$ **,** где *n , a* - натуральные числа.

1) $\left(\sqrt{5}\right)^3=$ 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}=$

3) $\sqrt[3]{24\cdot 729}=$ 4) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=$

8. Упростите выражение.

1) $\sqrt{4a^2}$ 2) $\sqrt[3]{8c^3a^3}$ 3) $\sqrt[6]{\frac{64\square^{12}}{729-^{6}}}$

4) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16x^4y^8}}$

5) $\sqrt[5]{\dfrac{x^{10}c^5}{y}}$

8. Вычислите, пользуясь свойствами степени.

1) $2^2\ 2^3$

5) $(\ 2^2\ )^2$

9) $\dfrac{2^3+2^{-3}}{4^3+1}$

2) $3^3 : 3^6$

6) $(\ -4)\ 2^4$

10) $\dfrac{2\cdot3^{20}-5\cdot3^{19}}{(-9)^9}$ $\dfrac{2\cdot3^{20}-5\cdot3^{19}}{(-9)^9}$

3) $8\ 2^{-4}$

7) $(8\ 2^{-4}\ )^{-1}$

11) $\dfrac{3^{15}+3^{14}}{3^{14}+3^{12}}$

4) $(-4)^{-2} : 4^{-4}$

8) $(5^{-4}\ )\ (5^{-4}\ )^{-2}$

12) $(-2)^3 + 2^2 + (-1)^{10}$

14. Упростить выражение:

1) $\dfrac{5a}{28в^2}\cdot 8aв\cdot\dfrac{7в}{5a^3}$

2) $\dfrac{a^3+в^3}{a^2в-в^3}:\dfrac{a^2+aв}{a^2-в^2}$

3) $\dfrac{a^3-8}{a+2}\cdot\dfrac{a^2-4}{a^2+2a+4}$

4) $\dfrac{42}{a^2-9}+\dfrac{8}{2a+3}+\dfrac{7}{3-2a}$

5) $\left(\dfrac{xy}{x^2-y^2}-\dfrac{y}{2x-2y}\right):\dfrac{3y}{x^2-y^2}$

6) $\left(\dfrac{2a+1}{2a-1}-\dfrac{2a-1}{2a+1}\right)\cdot\dfrac{10a-5}{4a}$

7) $\left(1-\dfrac{1}{a+в}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{a+в}\right)-1$

8) $\left(a-в+\dfrac{4aв}{a-в}\right):\left(a+в-\dfrac{4aв}{a+в}\right)$

9) $\dfrac{40-10a-5a^2}{a-2}+\dfrac{a^3+8}{a^2-2a+4}\cdot 8$

10) $\left(a-2в-\dfrac{a^2-в^2}{a+в}\right):\left(2a-в+\dfrac{a^2-в^2}{a-в}\right)$

15. Сократить дроби:

1) $\dfrac{3x^2-2x-8}{2x^2-3x-2}$

2) $\dfrac{x^2-4x-12}{x-2}$

3) $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+6}$

4) $\dfrac{x^3-9x}{x+3}$

5) $\dfrac{x+3}{x^2-6x-27}$

6) $\dfrac{x^3-1}{2x^2-5x+3}$

7) $\dfrac{x^2+x-2x}{x-1}$

8) $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$

9) $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$

10) $\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+x}$

2. Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа **a** по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получилось заданное (логарифмируемое) число.

$\log_b a = x$, где **b - основание логарифма и**
$b^x = a$, $b \rangle 0$, $b \neq 1$, a - заданное (логарифмируемое) число, $a \rangle 0$.

Свойства логарифмов

1. Отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.
2. При любом основании **a** ($a\rangle\ 0$, $a \neq 1$) логарифм единицы равен нулю.

$$\log_a 1 = 0 .$$

3. Логарифм числа, равного основанию, всегда равен единице.

$$\log_a a = 1 .$$

4. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей по тому же основанию.

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c .$$

5. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя по тому же основанию.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c .$$

$$\log_a \frac{1}{c} = - \log_a c .$$

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания.

$$\log_a N^m = m \log_a N.$$

7. Логарифм корня равен логарифму подкоренного выражения, делённому на показатель степени корня.

$$\text{loga} \quad \frac{\log_a n}{m} = \frac{1}{m}\log_a N .$$

8. Логарифм степени основания равен произведению числа $\frac{1}{n}$ на логарифм основания, где п - показатель степени основания.

$$\log_a{}^n N = \frac{1}{n}\log_a N .$$

Основание логарифма может быть равным 10 (десятичные логарифмы) - lg.

Если же основание логарифма равно числу $e \approx 2{,}87.....$, то логарифм называется натуральным - ln.

Формула перехода от одного основания к другому.
Основное логарифмическое тождество

$$\mathbf{\log_a b} = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \textit{где } \log_c a \neq 0\ ;$$

$$\mathbf{a^{\log_a b} = b.}$$

3. Расширенное понятие числа

«Всё есть число»
Пифагор

Число является одним из основных понятий математики. Представление о числе развивалось в течении многих тысячелетий одновременно с потребностями человека в счёте и измерении.

Некоторые обозначения:

N - множество натуральных чисел (1, 2, 3,......n) .

Z - множество целых чисел (0, ± 1, ± 2, ..., $\pm$n) .

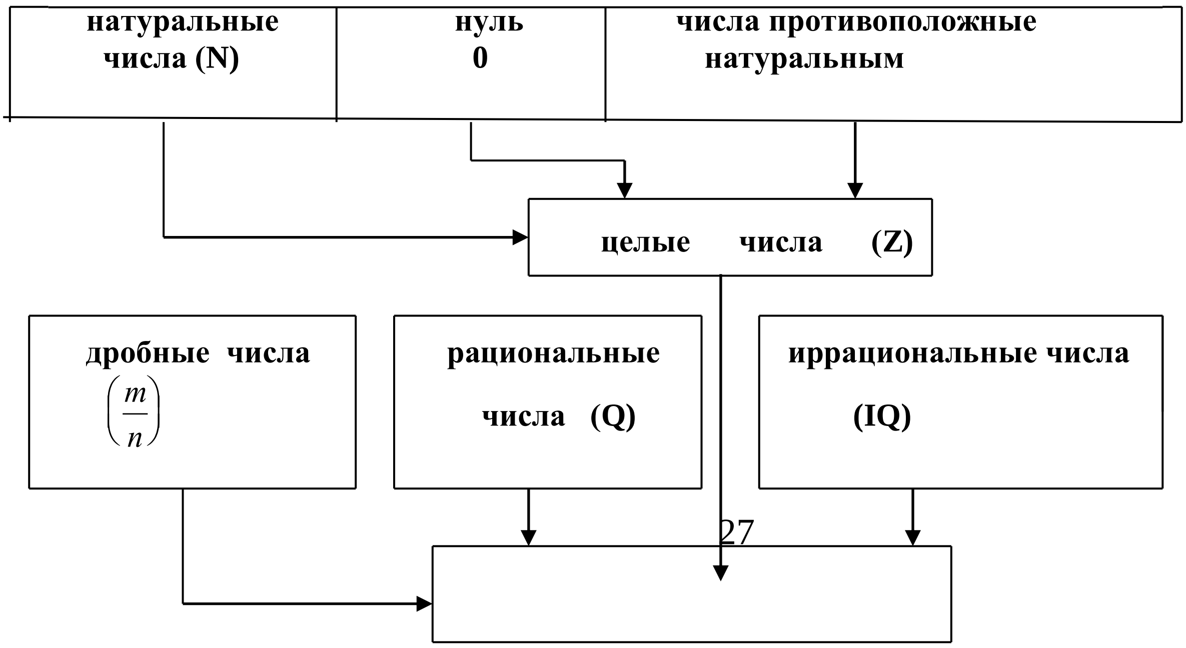
$\frac{m}{n}$ - множество дробных чисел (m - целое число, n - натуральное число).

Q - множество рациональных чисел.

IQ - множество иррациональных чисел.

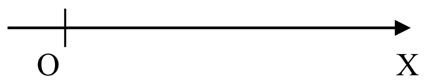
R - множество действительных чисел.

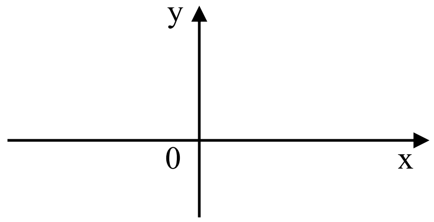
$\in$ - знак принадлежности к множеству чисел.



действительные числа (R)

Каждое число изображается точкой на числовой оси, а каждая пара чисел изображает точку на координатной плоскости в декартовой системе координат.





Числовая ось - это прямая с указанным направлением и точкой отсчёта

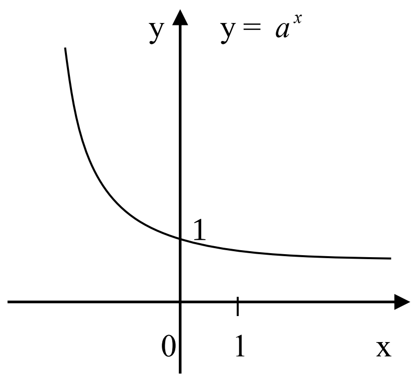
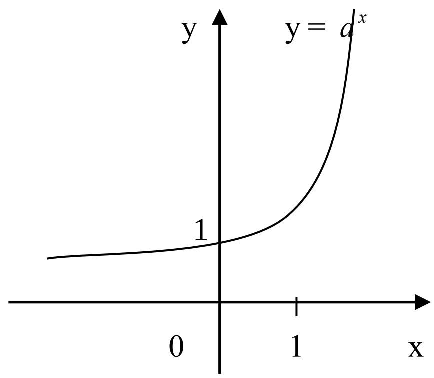
Декартова система координат на плоскости - это две взаимно пер-перпендикулярные оси с общим началом

С помощью чисел можно задавать не только точки прямой, но также точки плоскости и пространства.

4. Показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики.

Определение: Функция вида y = a^x, где $a>0, a \neq 1$, называется показательной функцией.

Свойства показательной функции.

0 < a < 1	*a > 1*
 1. Область определения $x \in R$ 2. Область значений y > 0. 3. Функция общего вида. 4.Убывает на всей области определения 5.Корней нет. 6.Графиком функции является ветвь гиперболы, проходящая через точки (0; 1), (1;a). Функция непрерывна	 1. Область определения $x \in R$ 2. Область значений y > 0. 3. Функция общего вида. 4.Возрастает на всей области определения 5.Корней нет 6.Графиком функции является ветвь гиперболы, проходящая через точки (0; 1),(1; a). Функция непрерывна

Логарифмическая функция, ее свойства и график.

Определение: Функция вида у = $\log_a x, a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$ называется логарифмической функцией. Так как показательная функция непрерывна и монотонна, то она имеет обратную функцию. Этой функцией является логарифмическая функция.

График обратной функции симметричен относительно прямой у = х

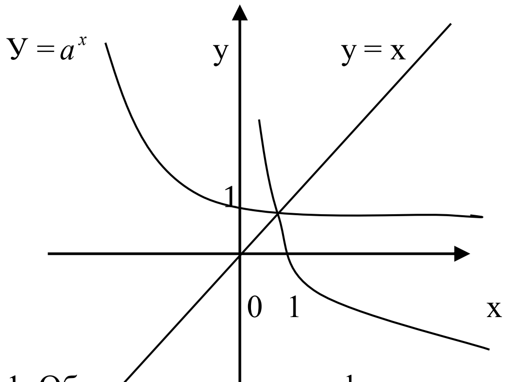
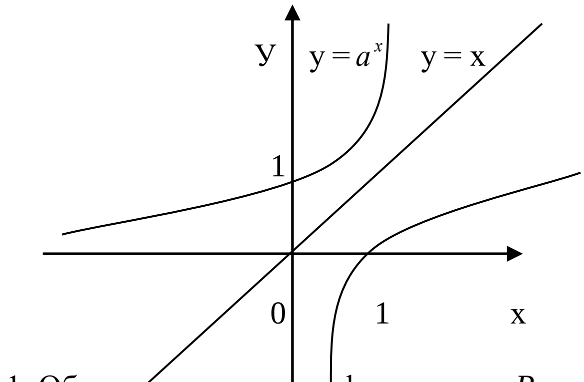
0 < a < 1	*a > 1*
 1. Область определения функции х $\in R$. 2.Область значений функции у $\in R$. 3. Функция общего вида. 4. Убывает на всей области определения 5. Корень х = 1. 6. Графиком функции является ветвь гиперболы проходящая через точки (1; 0), (а; 1). 7.Функция непрерывна и монотонна, значит она имеет обратную.	 1. Область определения функции х $\in R$. 2.Область значений функции у $\in R$. 3. Функция общего вида. 4.Возрастает на всей области определения 5. Корень х = 1. 6. Графиком функции является ветвь гиперболы проходящая через точки (1; 0), (а; 1). 7.Функция непрерывна и монотонна, значит она имеет обратную.

График логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно прямой у = х.

5. Решение показательных уравнений методом приведения к одному основанию.

Определение: Уравнение называется показательным, если оно содержит неизвестное в показателе степени.

Если равны степени и равны их основания, то равны и показатели степеней.

Суть метода приведения к одному основанию заключается в уравнивании оснований степеней, а затем и их показателей.

Пример 1: Решить уравнение $2^{3x-4} = 32$

Решение: 1. Приведем правую часть уравнения к основанию 2. $32 = 2^5$, тогда, пользуясь свойством равенства степеней, получаем 3х – 4 = 5.

9. Решая полученное уравнение, находим его корень х = 3.

Ответ: х = 3.

Проверку в показательных уравнениях не производят, так как область определения показательной функции х – любое действительное число.

Пример 2: Решить уравнение $6^{x^2-7x+12} = 1$.

Решение: 1. Представим единицу как степень числа 6 , $6^0=1$, тогда уравнение имеет вид $6^{x^2-7x=12} = 6^0$

2.Уравниваем показатели степеней и получаем уравнение $x^2-7x+12=0$

3.Решая уравнение, получаем корни $x_1=3, x_2=4.$

Ответ: $x_1=3, x_2=4.$

6. ***Решение показательных неравенств методом приведения к одному основанию.***

Если основание степени больше единицы, то при сравнении показателей степеней между ними ставится тот знак неравенства, который стоит между степенями. Если основание степени больше нуля, но меньше единицы, то при сравнении показателей степеней между ними ставится знак неравенства противоположный знаку, стоящему между степенями.

$$f^{g_1} \rangle f^{g_2} \Leftrightarrow g_1 \rangle g_2, a \rangle 1$$

$$f^{g_1} \rangle f^{g_2} \Leftrightarrow g_1 \langle g_2, 0 \langle a \langle 1$$

Теми же свойствами обладают показательные неравенства, содержащие нестрогие знаки ($\leq$ *или* $\geq$).

Пример 1:

Решить неравенство 6 1 (на листочке)

7. ***Решение логарифмических уравнений методом приведения к одному основанию.***

При решении логарифмических уравнений необходимо помнить о том, что область определения логарифмической функции составляют только положительные числа или выражения. Если область определения не найдена, то после решения уравнения следует сделать проверку, чтобы исключить отрицательные числа или выражения, которые могут появиться пол знаком логарифма.

Пример 4: Решить уравнение $\log_3(x-12)=2$ $_3(x-12)=2$

Решение: 1. Область определения уравнения х – 12 $\rangle 0, x\rangle 12.$

2. По определению логарифма $3^2 = x-12$, х = 9 + 12, х = 21 – удовлетворяет области определения уравнения.

Ответ: х = 12.

Пример 2: Решить уравнение lg $(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$

Решение: 1. Область определения уравнения

$$\begin{cases} x-3 \rangle 0 \\ x-2 \rangle 0 \end{cases}.$$

2. Из решения системы следует, что х $\rangle 3$

3. По свойствам логарифмов преобразовываем обе части уравнения, тогда

lg (х – 3) (х – 2) = $\lg\frac{10}{5}$, потенцируем выражение (опускаем знак логарифма).**Так как основания логарифмов равны, то равны и выражения, стоящие под знаками логарифмов.**

4. (х-3) (х – 2) = 2, $x^2-5x+6=2, x^2-5x+4=0, x_1+x_2=5, x_1\cdot x_2=4, x_1=1, x_2=4$

5. Первый корень не удовлетворяет области определения уравнения.

Ответ: х = 4.

Самостоятельная работа № 4
Тема: «Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств»

1. Решить уравнения:

1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$
2) $5^{3x} - 2 \bullet 5^{3x-1} - 3 \bullet 5^{3x-2} = 60$
3) $5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 2^{2x+2}$
4) $7^{4\sqrt{x}} - 8 \bullet 7^{\sqrt{4x}} + 7 = 0$
5) $16^x - 50 \bullet 2^{2x} = 896$

2. Вычислить.

1) $\log_{12} 2 + \log_{12} 6$
2) $\log_{27} 81$
3) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$
4) $3^{\log_3 2}$
5) $4^{\log_4 7}$
6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 7} =$
7) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 7} =$

3. Решить уравнения:

1) $2^{x+1} = 16$ 2) $4^{x-1} = 64$

3) $8^{x+2} = 128$ 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8}$

5) $8^{x} \cdot 4^{x+15} = \frac{1}{16}$ 6) $27^{3-\frac{x}{3}} - 81 = 0$

7) $9^{\frac{x}{2}-1} = 3$ 8) $3^{5-2x} = 1$

4. Решить неравенства

1) $4^{x} \geq 64$ 2)$3^{2x\leq} \leq 81$

3) $25^{-x} \rangle \frac{1}{5}$ 4) $8^{x} \langle 16$

5) $2^{3x-2} \rangle 1$ 6) $2^{9x-x^2\leq} \leq 1$

7) $(0,5)^{3x+6} \langle \frac{1}{64}$ 8) $27 \rangle \left(\frac{1}{3}\right)^{6x}$

9) $\left(\frac{1}{9}\right)^{4x+3} \leq \frac{1}{27}$ 10) $3^{6-x} \rangle 3^{3x-2}$

5. Решить уравнения:

1) $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$ 2) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 3$

3) $\log_{0,3} x = \log_{0,3} 36 - \log_{0,3} 12$ 4) $\log_2 (x^2 + 4x + 3) = 3$

5) $\log_5 (x+1) + \log_5 (2x+3) = 1$ 6) $\log_4 x = \log_4 5 + \log_4 3$

Раздел 5. Тригонометрические функции и их свойства. Формулы тригонометрии и их следствия

Словарь основных понятий.

Арксинус - многозначная тригонометрическая функция, обратная функции y= sin x
на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (главная ветвь арксинуса); обозначается arcsin x или Arcsin x.

Арккосинус - многозначная тригонометрическая функция, обратная функции y= cos x на промежутке $[0; \pi]$ (главная ветвь арккосинуса); обозначается arccos x или Arccos x.

Арктангенс - многозначная тригонометрическая функция, обратная тангенсу на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (главная ветвь арктангенса); обозначается arctg x или Arctg x .

Арккотангенс - многозначная тригонометрическая функция, обратная котангенсу на промежутке$(0; \pi)$ (главная ветвь арккотангенса); обозначается arcctg x или Arcctg x.

Аргумент тригонометрической функции - независимая переменная, от значений которой зависит значение тригонометрической функции; обозначается

(буквами греческого алфавита) или x,y,z,......(буквами латинского алфавита).

Градусная мера угла - мера плоского угла в градусах, один градус равен 1/360 полной окружности; обозначается 1^0, 2^0,...... .

Значение тригонометрической функции - число из области значений тригонометрической функции. Это число может быть найдено по таблице углов или с помощью микрокалькулятора.

Изменение значений тригонометрической функции - множество значений, которые может принимать тригонометрическая функция в зависимости от величины угла.

Косинусойда - график функции косинус (х) в декартовой системе координат; тригонометрическая кривая с периодом Т = 2 π; симметричная оси ординат (ОУ); отличающаяся от синусойды сдвигом по оси абсцисс влево на π / 2

Косинус - одна из основных тригонометрических функций угла, определяется как абсцисса точки на единичной числовой окружности в декартовой системе координат.

Котангенс - тригонометрическая функция, определяемая как отношение косинуса аргумента к его синусу при условии, что синус не равен нулю; обозначается ctgx.

Котангенсойда - график функции котангенс в декартовой системе координат периодическая кривая с Т = π

Наибольшее значение тригонометрической функции - самое большое число из множества значений функции, которое функция может принимать.

Наименьшее значение тригонометрической функции - самое маленькое число из множества значений функции, которое функция может принимать.

Наименование функции - название тригонометрической функции.

Одноимённые функции углов - функции, которые имеют одинаковое название, но разный аргумент (угол).

Окружность числовая единичная - окружность в декартовой системе координат, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен единице. Каждая точка, лежащая на этой окружности имеет координаты, которые удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 = 1$.

Основные тригонометрические тождества - тождества тригонометрии, в которых указана связь между основными тригонометрическими функциями, например: $1 + ctg^2x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Основные тригонометрические функции - функции синус, косинус, тангенс, котангенс; обозначаются: **sinx, cosx, tgx, ctgx .**

Период тригонометрической функции - число, прибавленное к аргументу тригонометрической функции и не изменяющее её значение.

Период синуса и косинуса - 2πк, где к$\in$Z.

Период тангенса и котангенса - πк, где к $\in$ Z.

Промежутки возрастания (убывания) функции - те промежутки из области определения тригонометрической функции, в которых она возрастает или убывает.

Радианная мера угла - мера угла в радианах.

1рад = $57^0 17^/ 44^{//}$ 57^0,3.

Разноимённые функции - тригонометрические функции, которые имеют разное название, но могут иметь одинаковый аргумент. Например cosx и sinx, cosy и siny.

Синус - одна из основных тригонометрических функций угла; определяется как ордината точки на единичной числовой окружности в декартовой системе координат; обозначается **sinx**

Синусойда - график функции синуса в декартовой системе координат; периодическая кривая с периодом Т = 2 π, симметричная относительно начала координат

Тангенс - тригонометрическая функция, которая обозначается **tgx** и определяется формулой $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, при условии, что cosx $\neq$ 0

Тангенсойда - график функции тангенса в декартовой системе координат; периодическая кривая с периодом Т = π, симметричная относительно начала координат.

Тригонометрия - раздел математики, в котором изучается зависимости между величинами углов и длинами сторон треугольников, а также свойства тригонометрических функций и связи между ними.

Тригонометрическая формулы - формулы, которые используются для решения тригонометрических задач. Сюда входят: основные тригонометрические тождества, формулы приведения двойных и половинных углов, суммы и разности аргументов и др.

Основные тригонометрические тождества.

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2) $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$
3) $\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$
4) $\mathrm{tg}x\ \mathrm{ctg}x = 1$
5) $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6) $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Формулы двойных и половинных углов.

1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
3) $\mathrm{tg}2x = \dfrac{2tgx}{1-tg^2 x}$
4) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$
5) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$
6) $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$
7) $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$
8) $\mathrm{tg}x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$
9) $1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$
10) $1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$

Тригонометрические формулы (Набор со страниц 1,2,3)

Упражнения с решениями

1. Записать в радианной мере углы:

а) 30^0 б) 540^0

Решение: а) $\alpha = \dfrac{\pi \cdot 30^0}{180^0} = \dfrac{\pi}{6}$.

б) $\alpha = \frac{\pi\, 540^0}{180^0} = 3\pi$.

2. Записать в градусной мере углы:

а) $\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $б)\ \frac{3\pi}{4}$

Решение: $а)\ \alpha^0 = \frac{180^0 \frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{180^0}{6} = 30^0$

б) $\alpha^0 = \frac{180^0 \frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{180^0\, 3\pi}{4\pi} = 135^0$

3. Определить знаки следующих выражений:

а) $\mathrm{Sin}35^0$; $\qquad$ б) $\mathrm{Cos}167^0$; $\qquad$ в) tg3; $\qquad$ г) ctg(-1,5) .

Решение: а) 35^0 - угол 1 четверти, поэтому $\sin 35^0 > 0$.

б)167^0 - угол, оканчивающийся во четверти, значит $\cos 167^0 < 0$.

в) 3 радиана - угол четверти, поэтому $tg3 < 0$.

г) -1,5 - угол четверти, значит $ctg(-1,5) < 0$.

4. Вычислить:

$$3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + 3tg\frac{\pi}{3} - 4ctg\frac{\pi}{2}\ .$$

Решение: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $ctg\frac{\pi}{2} = 0$

Подставляя в данное выражение, находим:

$$3\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} - 4\cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

5. Вычислить:

а) $\mathrm{Sin}1110^0$; б) $Cos\frac{25\pi}{4}$.

Решение: а) $\mathrm{Sin}1110^0 = \sin(360^0\, 3 + 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$;

б) $Cos\frac{25\pi}{4} = \cos 6\frac{1}{4}\pi = \cos(6\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Упростите выражение:

$\mathrm{Sin}^2x + \cos^2x + ctg^2x$.

Решение: $(\sin^2x + \cos^2x) + ctg^2x = 1 + ctg^2x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

7. Упростить выражение: $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)} = tg\alpha .$$

8. Вычислить (страницы 5, 6,)

Самостоятельная работа № 5 (страницы 7, 8, 9, 10)
Тема: «Тригонометрические преобразования и уравнения»

Раздел 6. Производная функции. Приложение производной к исследованию и построению графиков функций

Определение: Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Приращение аргумента – это разность между новым значением аргумента и первоначальным. Приращение функции - это разность между новым значением функции и первоначальным.

$\Delta x = x - x_0$ **приращение аргумента**

$\Delta y = y - y_0$ **приращение функции**

$y' = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$

x $\to 0$

Если точка не входит в область определения функции, то в этой точке производной функции нет. Необходимым условием существования производной функции в точке является непрерывность функции в этой точке.

1. Правила дифференцирования

1.Производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме этих функций.

$$(u+v-w)' = u'+v'-w'$$

2.Производная произведения двух функций равна производной первого сомножителя, умноженной на второй, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

3.Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

4. Производная дроби равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя данной дроби, а числитель равен производной числителя данной дроби, умноженной на ее знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

5.Производная степени равна произведению показателя степени на то же основание с показателем на единицу меньше.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Пример 1: Найти производную функции у = $2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4x - 8$

Решение: Пользуясь правилами дифференцирования, получаем

$y' = 8x^3 + 12x^2 - 10x + 4$

Пример 2: Найти производную функции у = $(2x-5)(4x+8)$

Решение:

$$y' = (2x-5)'(4x+8) + (4x+8)'(2x-5) = 2(4x+8) + 4(2x-5) = 8x + 16 + 8x - 20 = 16x - 4$$

Пример 3: Найти производную функции у = $\frac{2x-5}{4x+8}$

Решение: $y' = \frac{(2x-5)'(4x+8) - (4x+8)'(2x-5)}{(4x+8)^2} = \frac{2(4x+8) - 4(2x-5)}{(4x+8)^2} =$

$$= \frac{8x + 16 - 8x + 20}{(4x+8)^2} = \frac{36}{(4x+8)^2}$$

2. Экстремумы функции. Промежутки монотонности

Внутренние точки области определения функции, в которых первая производная равна нулю или на существует называются экстремумами (критическими точками).

Если при переходе через точку х = x_0 первая производная меняет свой знак **с минуса на плюс**, то точка **х = x_0** является точкой **минимума**, обозначается **min.**

Если при переходе через точку х = x_0 первая производная меняет свой знак **с плюса на минус**, то точка **х = x_0** является точкой **максимума**, обозначается **max.**

Если на промежутке $[a;в]$ первая производная **положительна**, то **функция возрастает** на этом промежутке. Если на промежутке $[a;в]$ первая производная **отрицательна**, то **функция убывает** на этом промежутке.

Промежутки возрастания и убывания функции называются промежутками монотонности функции.

Значение функции в точке минимума называется наименьшим значением функции , а в точке максимума – наибольшим значением, обозначается $У_{max}, y_{min}$.

Алгоритм исследования функции на экстремум

1. Находят первую производную функции и раскладывают ее на множители, если это возможно.

2. Приравнивают производную к нулю или находят точки, в которых она не существует.

3. Наносят полученные корни производно на числовую ось и исследуют знак производной на каждом промежутке.

4. Находят промежутки монотонности и экстремумы.

Пример 4: Найти экстремумы функции $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 6$.

Решение:1. $y' = 3x^2 + 6x + 9$

2. $y' = 0$ $\quad 3x^2 + 6x + 9 = 0$ $\quad 3(x^2 + 2x + 3) = 0$ $\quad x^2 + 2x + 3 = 0$ $\quad D = 4 - 4 \cdot 3 \langle 0$,

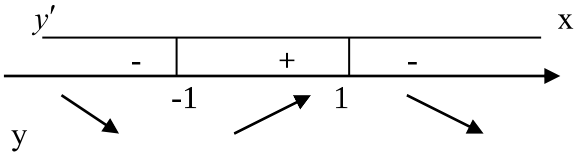
действительных корней нет, первая производная положительна при любом х, значит функция возрастает, экстремумов нет.

Пример 2: Найти экстремумы функции $y = -x^3 + 3x - 2$.

Решение: 1. $y' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1)$

2. $y' = 0$ $\quad -3(x-1)(x+1) = 0$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_2 = -1$

3.



Ответ: точка х = -1 $= x_{min}$ - точка минимума, точка х = 1 = x_{max} - точка максимума.

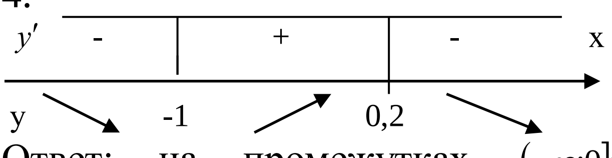
Пример 3: Найти промежутки монотонности функции у = 1 + 1,5 х – $3x^2 - 2,5x^3$.

Решение: 1. $y' = 1,5 - 6x - 7,5x^2$

2. $y' = 0$ $\quad 1,5 – 6x – 7,5x^2 = 0$ $\quad 7,5x^2 + 6x - 1,5 = 0$ $\quad x_1 = 0,2$ $\quad x_2 = -1$

3. y' = -7,5 (х – 0,2) (х + 1)

4.



Ответ: на промежутках $(-\infty;0]и[0,2;+\infty)$ Функция убывает, на промежутке $[-1;0,2]$ функция возрастает.

Пример 4: Найти наименьшее и наибольшее значение функции на промежутке:

у = $x^4 - 8x^2 - 9, [-1;1]$

При решении задач такого типа следует находить значение функции на концах промежутка и в точках экстремума, если они входят в заданный промежуток.

Из найденных значений функции выбирают самое большое значение и самое малое.

Решение: 1. $y' = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 4x(x-2)(x+2)$

2. $y' = 0$ в точках х = 0, х = 2, х = - 2.

3.

y'	-	+	-	+	x
y	-2	0	2		

4. Точки х = - 2 и х = 2 – точки минимума. Эти точки не входят в заданный промежуток, поэтому из дальнейшего исследования их исключаем.

Точка х = 0 – точка максимума. Эта точка входит в заданный промежуток. Найдем значение функции на концах промежутка и в точке х = 0.

у (- 1) = $(-1)^4 - 8(-1)^2 - 9 = -16$

у (1) = $1^4 - 8 \cdot 1^2 - 9 = -16$

у (0) = -9

Ответ: Наибольшее значение функции равно - 9 и достигается в точке х = 0, наименьшее значение функции равно -16 и достигается в точках х = - 1 и х = 1.

3. Общая схема исследования и построения графика функции.

1. Находят область определения функции.
2. Находят область значений функции.
3. Исследуют функцию на четность (нечетность).
4. Находят корни функции (точки пересечения функции с осью Ох) и точки пересечения с осью Оу.
5. Исследуют функцию на экстремум, промежутки монотонности, наибольшее и наименьшее значение на области определения функции.
6. Находят значение функции в точках экстремума.
7. Наносят найденные значения на координатную плоскость и строят график функции.

Некоторые этапы исследования можно опускать.

Пример 5: Построить график функции $y = x^3 - 12x + 4$

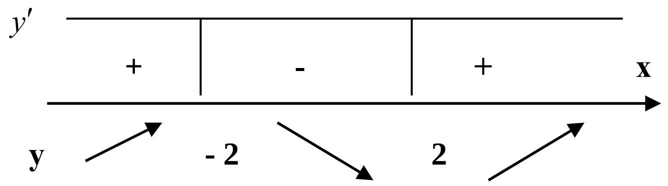
Решение: 1. Область определения функции х – любое действительное число.

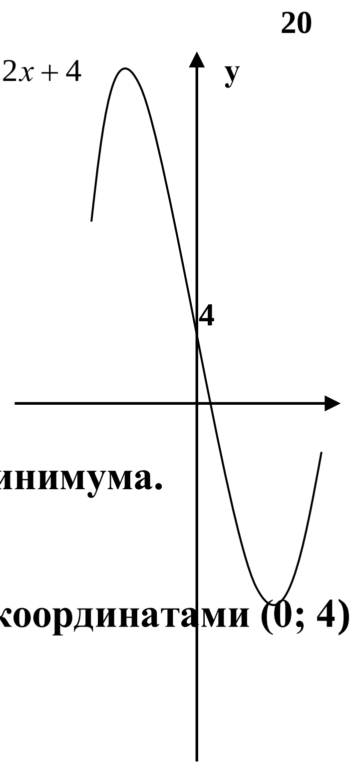
2. Область значений функции у – любое действительное число.

3. у (- х) = $(-x)^3 - 12(-x) + 4 = -x^3 + 12x + 4$. Функция не изменяет свой знак на противоположный и не сохраняет своего знака, значит она общего вида. Симметрии у графика функции нет.

4. $y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$

$y' = 0$ **в точках x = 2 и x = -2**





x = - 2 – точка максимума, x = 2 – точка минимума.
y(- 2) = 20, y (2) = -12.

Функция пересекает ось Оу в точке с координатами (0; 4)

Самостоятельная работа № 6
Тема: «Решение задач с помощью производной»

1.Исследовать функцию на экстремум:

а) y = $x^2 - 2x + 8$ **б) y = -** $\frac{2}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}$

в) y = - $x^3 - 3x + 2$ **г) y =** $x^4 - 2x^2 - 3$

д) y = $3x^2 - x^3$ **е) y =** $x^3 + 3x + 2$

2.Найти промежутки монотонности функции

а) y = $\frac{x^4}{4} + 8x + 5$ **б) y =** $x^3 - 5x^2 + 3x + 11$

в) y = 0,25 $x^4 + x^2 - 6$ **г) y = -** $x^3 + 6x^2 - 9x + +5$

д) y = 6x - x^3 **е) y =** $x^2 - 3x$

3.Найти наименьшее и наибольшее значение функции на промежутке:

а) y = $3x^5 - 5x^3, [2;3]$ **б) y =** $x^3 + 3x^2 - 9x, [-4;0]$

в) у = х $^4 - 2x^2 + 4, [2;3]$ **г) у = 5х** $^3 - 3x^5, [0;4]$

4.Построить графики функций:

а) у = х $^2 - 2x + 8$ **б) у = -** $\frac{2}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}$

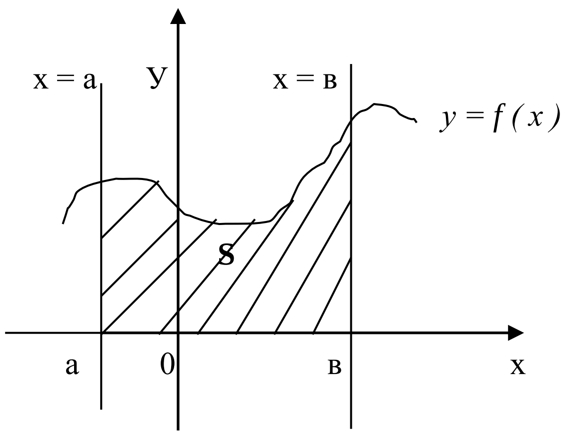
в) у = 0,25 х $^4 + x^2 - 6$ **г) у = -х** $^3 + 6x^2 - 9x + +5$

д) у = 6х - х ^{3} **е) у = х** $^2 - 3x$

Раздел 7. *Приложение определенного интеграла к решению задач*

1. Криволинейная трапеция.

Определение: Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной функции, прямыми х = а и х = в и осями координат.



Формула Ньютона - Лейбница

S = $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Плоская фигура – это фигура, лежащая в плоскости ХОУ и состоящая из криволинейных трапеций.

Алгоритм вычисления площади плоской фигуры:

1. Построить графики заданных функций.

2.Найти точки пересечения графиков функций. Абсциссы точек пересечения графиков функций будут являться пределами интегрирования.

3.Представить площадь плоской фигуры как сумму или разность площадей криволинейных трапеций.

4.Вычислить площадь каждой трапеции по формуле Ньютона – Лейбница.

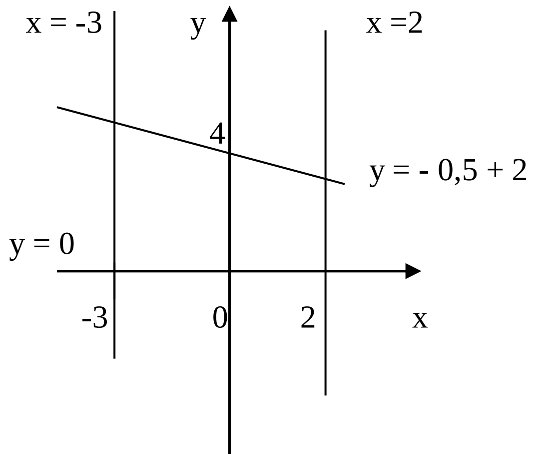
Пример 1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями x + y – 4 =0, y = 0, x = - 3, x = 2.*

Решение: x + y – 4 = 0 линейная функция. Приведем ее к виду y = кx+в.

2 y = 4 – x, y = - 0,5 + 2.

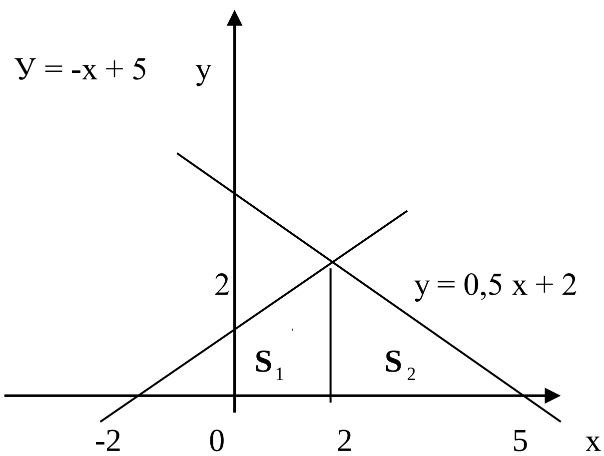
У = 0 ось ОХ, x = -3 и x = 2 –прямые параллельные оси ОУ, проходящие через точки (- 3; 0) и (2; 0)

$$S=\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)dx=\int_{-3}^{2}-0{,}5x\,dx+\int_{-3}^{2}2dx=-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{-3}^{2}+2x\Bigg|_{-3}^{2}=11\frac{1}{4}\ (\text{ед}^2)$$



Пример 2: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями x – 2 y + 4 = 0, x + y = 5, y = 0.

Решение: После преобразований уравнения прямых имеют вид: y = 0,5 x + 2 и y = - x + 5.Эти прямые пересекаются в точке с абсциссой x = 2. У= 0 – ось ОХ. Для определения точки пересечения графиков функций необходимо решить уравнение 0,5 x + 2 = - x + 5. Получаем x = 2. Построим графики заданных функций на одной координатной плоскости. Полученную фигуру разобьем на две криволинейных трапеции по точке пересечения. Площадь фигуры находится как сумма площадей криволинейных трапеций.



$S_1=\int_{-2}^{2}(0{,}5x+2)dx$

$S_2=\int_{2}^{5}(-x+5)dx$

S = S_1+S_2 =13,5 (ед^2)

Примечания:

1. Если график функции лежит ниже оси ОХ, то площадь вычисляют **по абсолютной величине, т.е. модулю**.

2. Если график одной функции лежит выше, чем график другой функции, то при вычислении площади фигуры “**из верхней функции вычитают нижнюю**”.

3. Если фигура симметричная, то нужно вычислить площадь **половины фигуры** и умножить ее на 2.

Самостоятельная работа № 7
Тема: «Решение задач с помощью определенного интеграла»

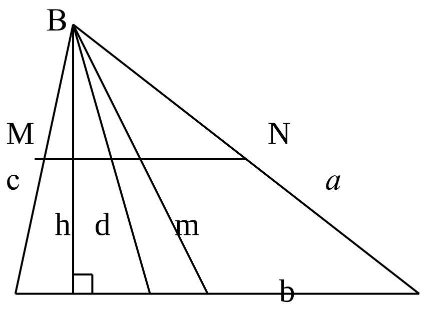
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = \frac{1}{x}$, x = 1, x = 2, y = 0.
2. $У = 2x - x^2$, y = 0.
3. У = 2 x , x = 1, x = 2, y = 0.
4. $У = x^2 - 2x + 2$, x = - 1, x = 2, y = 0.
5. $У = -x^2 + 4$, y = 0.
6. Х – 2 y + 4 = 0, 3 x + 2 y – 12 = 0, y = 0.
7. $У = 8 + 2x - x^2$, y = x + 6.
8. $У = 2x^2 - 2$, $y = x^2$.
9. $У = = x^2 + 1$,x = - 2, x = 2,y = 0.
10. $У = x^3$, x = - 2, x = 2.

Раздел 8. *Геометрические фигуры и их свойства*

1.Треугольники и их свойства.

Определение: Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек не лежащих на одной прямой.



Вершины - А, В, С.
Стороны - АВ, ВС, АС.
Высота $BB_1 = h$. $BB_1 \perp AC$
Медина $BB_2 = m$. $AB_2 = B_2C$.
Биссектриса АВ = d, $< ABB_3 = < B_3BC$
Средняя линия $MN = \frac{1}{2}AC$

В треугольнике можно построить три высоты, три медианы, три биссектрисы и три средних линии.

Высотой называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к противолежащей стороне.

Медианой называется отрезок, проведенный из вершины треугольника к противолежащей стороне и делящий эту сторону пополам. Медианы треугольник пересекаются в одной точке и этой точкой делятся в отношении 2: 1, считая от вершины треугольника.

Биссектрисой называется отрезок, проведенный из вершины угла треугольника и делящий этот угол пополам. Биссектриса треугольника делит сторону на отрезки пропорциональные сторонам треугольника. $\frac{AB_3}{AB}=\frac{B_3C}{BC}$. Биссектрисы треугольник пересекаются в одной точка. Точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности в треугольник. Центр вписанной окружности точка О равноудалена от сторон треугольника.

Средней линией называется отрезок, проходящий через середины двух сторон треугольника параллельно третьей стороне. Средняя линия треугольника равна половине стороны, которой она параллельна.

К сторонам треугольника можно построить **серединные перпендикуляры** (прямые перпендикулярные сторонам треугольника и проходящие через их середины). Серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке. Точка пересечения серединных перпендикуляров является центром описанной окружности около треугольника. Центр описанной окружности точка О равноудалена от вершин треугольника.

Периметром треугольника называется сумма трех его сторон**.**

$P_{\Delta ABC}$ = AB +BC + AC.

Площадь треугольника равна половине произведения высоты треугольника на его основание. **Основание треугольника** – это сторона треугольника, к которой проведена высота.

S=$\frac{1}{2}h_b\cdot b$**,** h_b - высота треугольника, проведенная к основанию b.

Площадь треугольника можно найти по формулам:

S = ab Sin α, где α- угол между сторонами a и b,

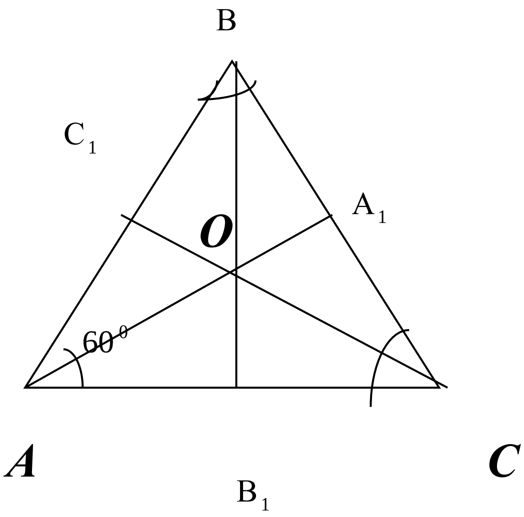
S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p = $\frac{a+b+c}{2}$ (Формула Герона).

Виды треугольников

1.Правильный (равносторонний) треугольник

Определение: Правильным треугольником называется треугольник, у которого все стороны равны.

Свойства треугольника:



1. В правильном треугольнике все углы равны 60^0.
2. Высоты, медианы, биссектрисы равны между собой и пересекаются в одной точке O, которая является центром вписанной и описанной окружностей.

$OA = OC = OB = R_{оп} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, где a – сторона треугольника.

$OC_1 = OA_1 = OB_1 = r_{вп} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, где a – сторона треугольника

3. Площадь треугольника $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
4. Высота треугольника $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

2.Равнобедренный треугольник.

Определение: Равнобедренным называется треугольник, у которого две боковые стороны равны.

Свойства треугольника:

1. Углы и высоты при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Биссектриса угла, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой и высотой треугольника.
3. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является высотой и биссектрисой треугольника.
4. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой.

$$S = \frac{1}{2}h_b \cdot b = \frac{1}{2}h_a \cdot a$$

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin A = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin B$$

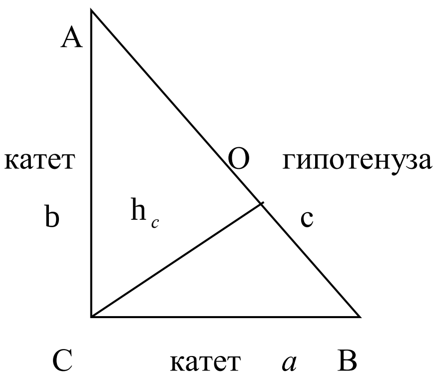
$AB = BC$, $\angle A = \angle C$, $AC_1 = CA_1 = h_a$

3. Прямоугольный треугольник.

Определение: Прямоугольным называется треугольник, у которого один из углов прямой.

Свойства треугольника:

1. В прямоугольном треугольнике сумму острых углов равна 90^0.
2. **Теорема Пифагора**: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух его катетов.
3. Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.
4. Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.
5. Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему.
6. Площадь прямоугольного треугольника равна произведению его катетов.
7. Катет, лежащий против угла 30^0 равен половине гипотенузы.
8. Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы.



$$< C = 90^0 \ , \ < A + < C = 90^0$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$S = \frac{1}{2}ab$$

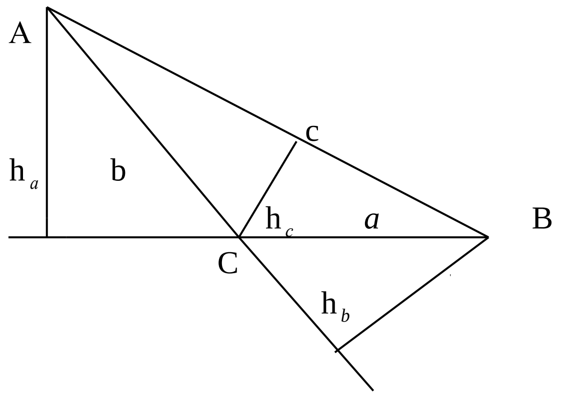
$$\sin A = \frac{a}{c} \ ; \ \cos A = \frac{b}{c} \ ; \ \mathrm{tg}\, A = \frac{a}{b}$$

4.Тупоугольный треугольник.

Определение: Тупоугольным называется треугольник, у которого один из углов тупой.

Свойства треугольника:

1. В треугольнике может быть только один угол тупой.
2. Центр описанной окружности около треугольника лежит вне плоскости треугольника.
3. Площадь треугольника равна половине произведения высоты треугольника на его основание.



$$S = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c$$

Для всех треугольников справедливы следующие утверждения:

1.Сумма углов треугольника равна 180^0.

2.Длина стороны треугольника меньше суммы длин других сторон.

3.Квадрат стороны треугольника равен сумме квадрата двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$

4.Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов). Это отношение равно двум радиусам описанной окружности около треугольника.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Признаки равенства и подобия треугольников

1.Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны (первый признак равенства треугольников).

2.Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней двум углам другого треугольника, то треугольники равны (второй признак равенства треугольников).

3.Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны (третий признак равенства треугольников).

4.Два прямоугольных треугольника равны: по катету и острому углу, по двум катетам, по катету и гипотенузе.

5.Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны (первый признак подобия треугольников).

6.Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами равны, то треугольники подобны (второй признак подобия треугольников).

7.Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны (третий признак подобия треугольников).

8.Периметры подобных фигур относятся как коэффициент подобия, а площади относятся как квадрат коэффициента подобия (коэффициент подобия - это отношение сторон подобных фигур).

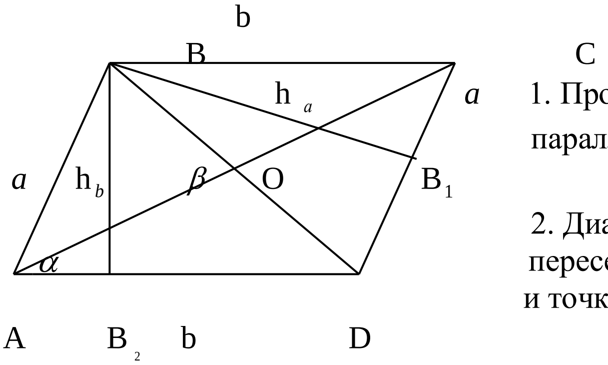
*2.**Четырехугольники и их свойства**.*

Определение: Четырехугольником называется многоугольник с четырьмя вершинами. Различают выпуклые и невыпуклые четырехугольники. **Выпуклым** называется четырехугольник, расположенный по одну сторону от прямой, проходящей через две его вершины, в противном случае четырехугольник называется невыпуклым.

Виды четырехугольников

1.Параллелограмм

Определение: Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны

2. Диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке и точкой и точкой пересечения делятся пополам.

Площадь параллелограмма равна произведению высоты параллелограмма на его основание. В параллелограмме можно построить две высоты к соответственным основаниям.

S= $h_a a = h_b b$

Площадь параллелограмма можно вычислить по следующим формулам:

S = ab sin α, где α-острый или тупой угол между сторонами параллелограмма.

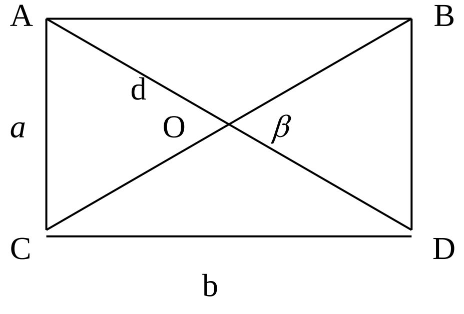
S = $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta$, где β-острый угол между диагоналями а d_1 и d_2 диагонали.

Периметр параллелограмма равен сумме четырех его сторон.

P = AB + BC + CD + AC = 2AB +2BC, так как AB = CD и BC = AD

2.Прямоугольник

Определение: Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.



Свойства прямоугольника:

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Квадрат диагонали прямоугольника- равен сумме квадратов двух его измерений длины (b) и ширины (a).

$d^2 = a^2 + b^2$

Прямоугольник сохраняет все свойства параллелограмма.

Около прямоугольника можно описать окружность, радиус которой равен половине диагонали прямоугольника.

Площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту. Одна из сторон прямоугольника может являться его высотой или основанием.

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$$

Площадь прямоугольника можно вычислить по формуле:

$\mathbf{S = d^2 sin}\ \beta$**,** где β - острый угол между диагоналями, а d - диагональ прямоугольника.

3.Ромб

Определение: Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба:

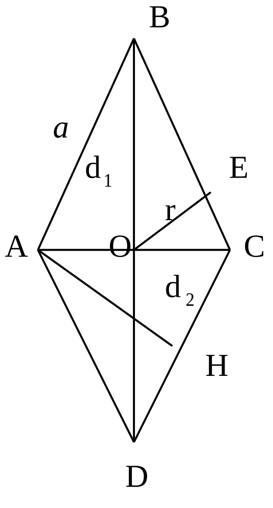
1.Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

2.**Ромб сохраняет все свойства параллелограмма**.

3.**Периметр** ромба равен сумме его сторон. **Площадь** ромба равна произведению высоты на основание.

4.В ромб можно вписать окружность **,** радиус которой равен :

$\boldsymbol{r} = \frac{2S}{P}$ **P = 4*a*** **S = h *a* =** $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$**, где *a*- сторона ромба, d_1 и d_2 - диагонали ромба**



AH- высота ромба

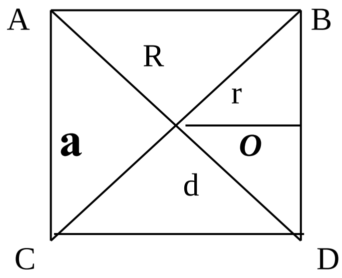
OE - радиус вписанной окружности

AC и BD- диагонали ромба

O – центр вписанной окружности

4 Квадрат

Определение: Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые.



Свойства квадрата:

1. Все углы квадрата прямые
2. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и точкой пересечения ***делятся пополам.***
3. В квадрат можно списать окружность, ***Радиус которой равен половине стороны*** квадрата.
4. Около квадрата можно описать окружность, радиус которой равен половине диагонали квадрата.

Периметр квадрата равен сумме его сторон. **Площадь** квадрата равна квадрату его стороны.

P = $4a$ **S =** a^2 **S =** $\frac{1}{2}d^2$**,**где

a- сторона квадрата и d – диагональ.

R = $\frac{1}{2}d, d = a\sqrt{2}$ **R =** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **r =** $\frac{1}{2}a$

5.Трапеция

Определение: Трапецией называется четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Две параллельные стороны называются **основаниями** трапеции, а непараллельные стороны – **боковыми сторонами**.

Различают произвольную, равнобедренную и прямоугольную трапеции.

В **равнобедренной трапеции** боковые стороны и углы при основаниях равны.

В **прямоугольной трапеции** два угла прямые.

Отрезок, проходящий через середины боковых сторон, параллельно основаниям называется **средней линией** трапеции. **Средняя линия** трапеции равен полусумме оснований трапеции.

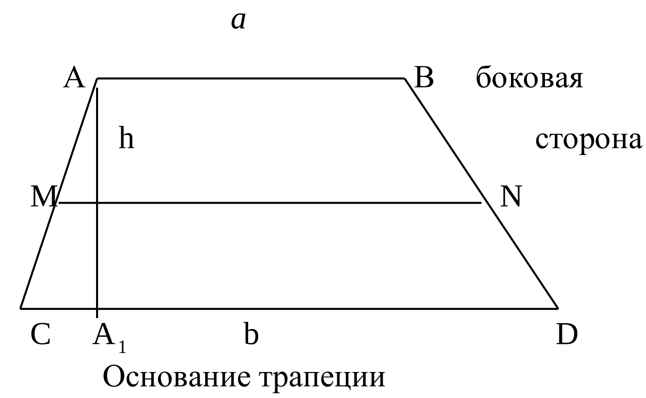
Если суммы противоположных сторон равны, то в трапецию можно вписать окружность.

Если суммы противолежащих углов равна 180^0 **, то около трапеции можно описать окружность.**

Для того чтобы найти элементы трапеции, необходимо построить две высоты и применить теорему Пифагора.

Периметр трапеции равен сумме ее сторон.

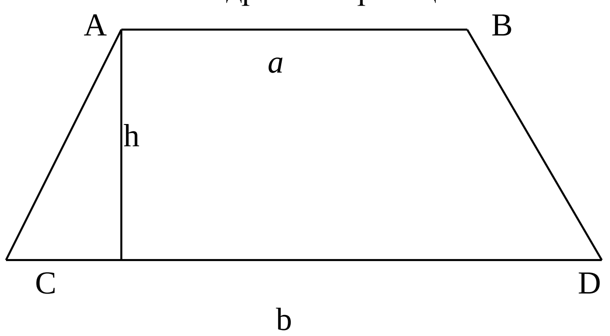
Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.



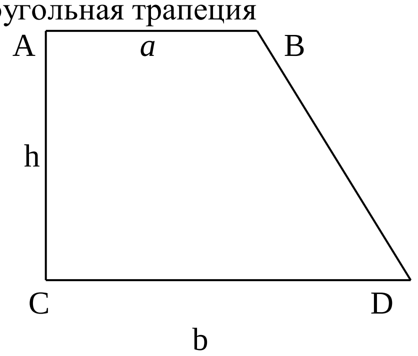
$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$S = \frac{a+b}{2}h$$

Равнобедренная трапеция



Прямоугольная трапеция



Окружность. Круг

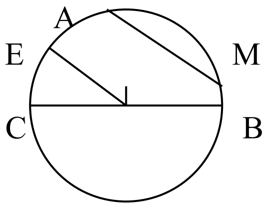
Определение: Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от данной точки. Данная точка называется **центром окружности**, заданное расстояние называется **радиусом окружности**

Расстояние от любой точки, лежащей на окружности, до ее центра также называется радиусом окружности.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки, лежащие на окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через ее центр. Диаметр окружности равен двум ее радиусам.



AM - хорда,
CB - диаметр, CB = 2R
OE – радиус, OE = R
O – центр окружности.

$C = 2\pi R$ - длина окружности

$S = \pi R^2$ - площадь круга

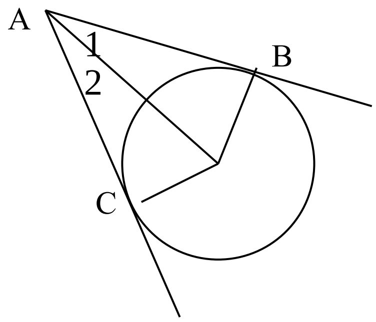
Площадь круга можно вычислить по формулам:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{RC}{2}, \text{ где } D = 2R,\ C = 2\pi R$$

1.Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки.

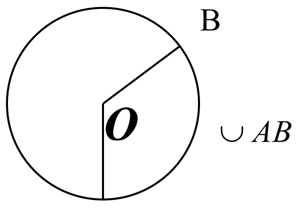
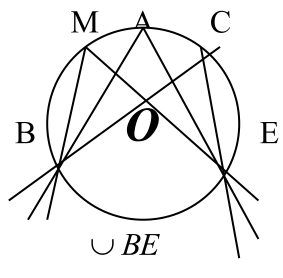
Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Если прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C, то отрезки AB и AC равны и составляют с прямой AO равные углы.



AB = AC   < 1 = < 2

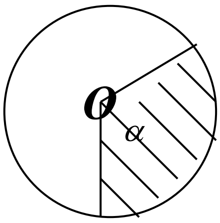
2. **Центральные и вписанные углы**.

Центральный угол	Вписанный угол
 Центральным углом называется угол,	 Вписанным углом называется угол,

вершиной которого является центр окружности, а стороны содержат радиусы. Центральный угол равен дуге, на которую он опирается. $< AOB = \cup AB$	вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу равны. Вписанный угол, опирающийся на дугу 180^0 прямой. $< BME = < BAE = < BCE = \frac{1}{2} \cup BE$

3.Круговой сектор.

Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами. $\mathbf{S}_{сек} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{RC}{2}$, где С – длина дуги окружности



С = $\frac{\pi R \alpha}{180^0}$, где α в градусах.

С = $\pi R \alpha$, где α в радианах.

4.Вписанная и описанная окружности.

Если вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность описана около многоугольника.

Если стороны многоугольника касаются окружности, то окружность вписана в многоугольник.

Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Для четырехугольника центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей

Зависимость радиуса описанной окружности от площади треугольника и его элементов:

S = $\frac{abc}{4R}$ **R=** $\frac{abc}{4S}$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

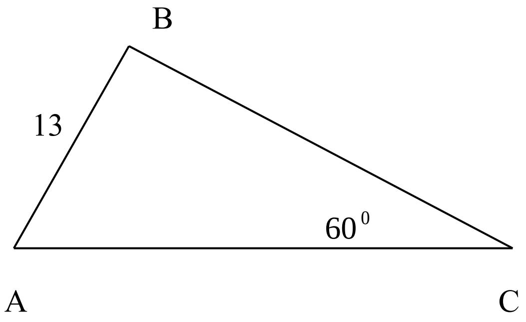
В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра многоугольника на радиус вписанной в него окружности.

S= $\frac{1}{2}Pr$ **r =** $\frac{2S}{P}$ P – полный периметр.

Пример 1: В треугольнике одна сторона равна 13 см, а противолежащий ей угол равен 60^0, разность двух других сторон равна 7 см. Найти стороны треугольника, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности.

Решение: 1. Пусть сторона AC равна x см, а сторона BC равна y см, x и y положительные числа, тогда x – y = 7(см). По теореме косинусов



$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos C$

$13^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^0$

$169 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - xy$

2. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 169 = x^2 + y^2 - xy \end{cases}$$

x = 7 + y подставляем во второе уравнение. После преобразований второе уравнение имеет вид:

$y^2 + 7y - 120 = 0$ корни уравнения $y_1 = -15, y_2 = 8$.

Первый корень не удовлетворяет условию задачи, так как сторона треугольника не может быть отрицательным числом.

Тогда x = 7 + 8 = 15. AC = 15 см, BC = 8 см.

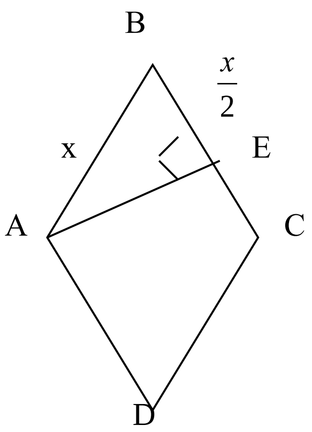
3. r = $\frac{2S}{P}$, S = $\frac{1}{2}BC \cdot AC \cdot \sin 60^0 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}(см^2)$

P = AB + AC + BC = 13 + 15 + 8 = 36 (см) r = $\frac{2 \cdot 30\sqrt{3}}{36} = \frac{5\sqrt{3}}{3}(см)$

4. R= $\frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 15 \cdot 8}{4 \cdot 30\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$ (см)

Пример 2: Высота ромба выходит из вершины тупого угла и делит противолежащую сторону пополам. Найти углы ромба.

Решение: 1. Пусть сторона ромба равна x см, тогда BE = EC = $\frac{x}{2}$*см*.



2. Треугольник ABE прямоугольный.
AB – гипотенуза, BE – катет, равный половине гипотенузы, значит < BAE =30^0 (по свойству прямоугольного треугольника), следовательно < ABE = 60^0 (по свойству острых углов прямоугольного треугольника).
3. Сумма односторонних углов ромба равна 180^0, значит < BAD = 180^0–60^0 = 120^0

4. В ромбе противолежащие углы равны. Тогда < BAD = < BCD = 120^0, < ABC= = < ADC = 60^0.

Самостоятельная работа № 8

Тема: «Решение задач на свойства геометрических фигур»

1.Стороны треугольника равны 4 дм, 5 дм и 6 дм. Найти высоту, проведенную к стороне 5 дм.

2. Найти основание равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см и медианой, проведенной к основанию 6 см.

3. Найти диагональ равнобедренной трапеции с основаниями 8 см и 12 см и боковой стороной 10 см.

4.Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Найти периметр и площадь ромба.

5.В треугольнике основание равно 24 см, а один из углов при основании равен 120^0.Сторона, лежащая против этого угла равна 56 см. Найти третью сторону и площадь треугольника.

6.Радиус окружности, описанной около прямоугольного равнобедренного треугольника, равен 10 см. Найти катеты и площадь треугольника.

7. Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найти площадь параллелограмма, если большая его сторона равна 15,2 см, а один из углов равен 45^0.

8. Найти стороны прямоугольника, если его площадь равна 250 см^2, а одна из сторон в 2,5 раза больше другой.

9. В треугольнике ABC AB = 16 см, BC = 22 см, высота, проведенная к стороне AB равна 11 см. Найти высоту, проведенную к стороне BC.

10.Около квадрата со стороной 8 см описана окружность. Найти длину окружности и площадь круга, ограниченного этой окружностью.

11.В окружность вписан треугольник ABC так, что AB – диаметр окружности. Найти углы треугольника, если: а) $\cup BC = 134^0, б) \cup AC = 70^0$.

12. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC (AB = AC). Найти углы треугольника, если $\cup BC = 102^0$.

13. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 6 см. Найти радиус описанной окружности.

14.Найти сторону правильного треугольника, если радиус описанной окружности равен 10 см.

15. В равнобедренный треугольник с основанием 10 см и боковой стороной 13 см вписана окружность. Найти радиус вписанной окружность и площадь круга, ограниченного окружностью.

16. Найти периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см , а радиус вписанной в него окружности равен 4 см.

17. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найти периметр четырехугольника.

18. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найти площадь четырехугольника.

19. Длина окружности цирковой арены равна 41 м, Найти диаметр и площадь арены.

20. Найти сторону треугольника, лежащую против угла 135^0, если две другие стороны равны 2дм и 3дм.

Раздел 9. *Геометрические тела и их свойства*

1.Понятие многогранника.

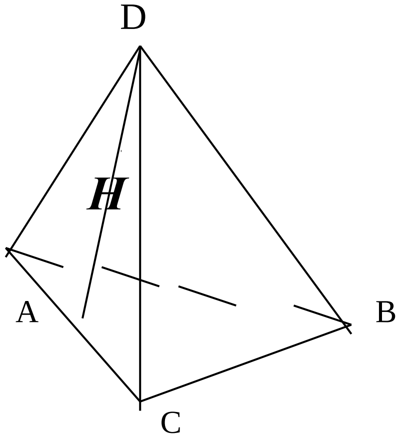
Определение*:* Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая часть пространства называется **многогранником.**

Многоугольники, из которых составлена поверхность, называются **гранями**, их стороны – ребрами, а концы сторон - **вершинами многогранника**.

2.Виды многогранников и их свойства.

Тетраэдр

Определение: Тетраэдром называется геометрическое тело, ограниченное четырьмя плоскостями, каждая из которых треугольник.



$\boldsymbol{S}_{пов} = \boldsymbol{S}_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{осн} + S_{бок}$

V=$\frac{1}{3}$ $S_{осн} \bullet H$, где Н- высота тетраэдра,.

отрезок, проведенный из вершины

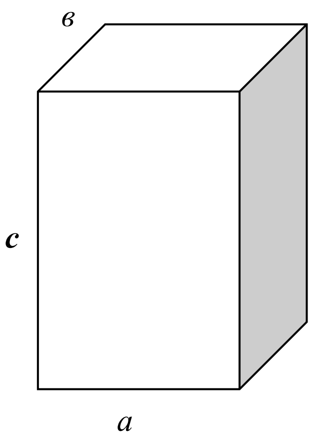
тетраэдра е его основанию.

Параллелепипед

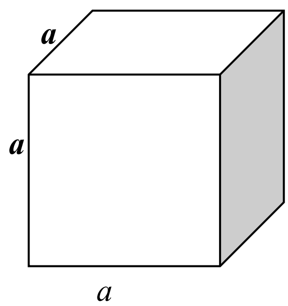
Определение: Параллелепипедом называется геометрическое тело, поверхность которого ограничена шестью попарно параллельными плоскостями являющимися параллелограммами.

Параллелепипеды делятся по видам на **наклонные, прямые и прямоугольные**.

Параллелепипед, у которого все ребра равны, называется **кубом.**



Прямой или прямоугольный параллелепипед



куб

Свойства параллелепипеда

1. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.

2. Внутренние диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам.

3.В прямоугольном параллелепипеде квадрат внутренней диагонали равен сумме квадратов его измерений (длины, ширины и высоты).

Площадь поверхности и объём параллелепипеда

$\mathbf{S}_{пов} = \mathbf{S}_{осн} + \mathbf{S}_{бок}$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{a\ b\ c}$, где a-длина, b- ширина, c- высота тела.

Площадь поверхности и объём куба

$$\mathbf{S}_{пов} = 6\boldsymbol{a}^2 \qquad\qquad \mathbf{V} = \boldsymbol{a}^3$$

a **–** длина ребра куба.

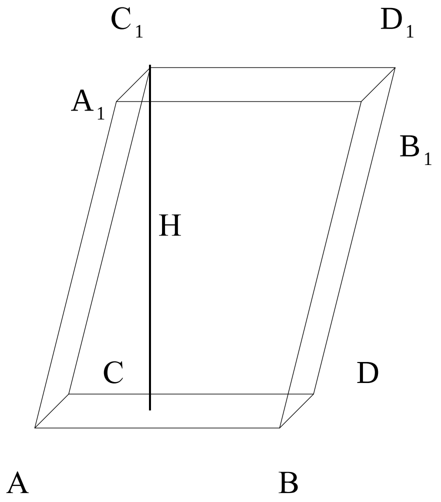
Призма

Определение: Призмой называется геометрическое тело, поверхность которого ограничена двумя равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях параллелограммов, составляющих боковую поверхность тела.

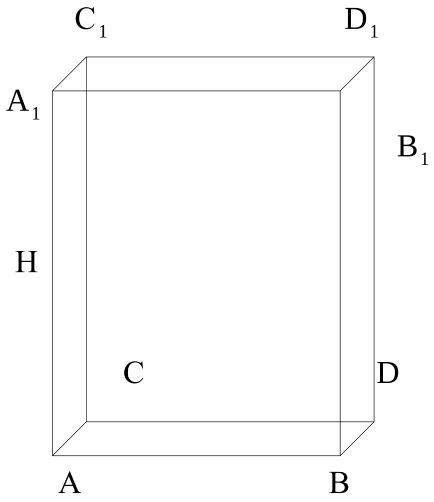
По видам призмы бывают наклонные, прямые, правильными.

Призма называется **правильной,** если она прямая, а в её основании лежит правильный многоугольник.

Площадь боковой поверхность **прямой и правильной** призмы равна произведения периметра её основания ни высоту.



Четырехугольная наклонная призма



Четырехугольная правильная призма

Площадь поверхности и объём призмы

$\mathbf{S}_{пов} = \mathbf{S}_{осн} + \mathbf{S}_{бок}$, $\mathbf{V} = S_{осн} \bullet H$, где H- высота призмы.

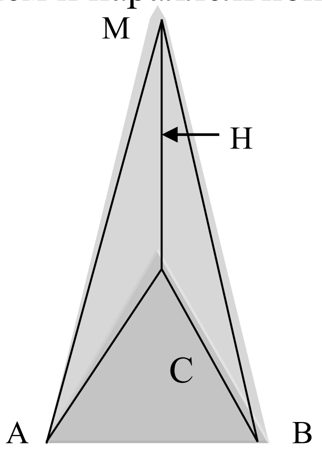
Пирамида

Определение: Пирамидой называется геометрическое тело, поверхность которого ограничена плоскостью многоугольника и плоскостями треугольников, имеющих общую вершину.

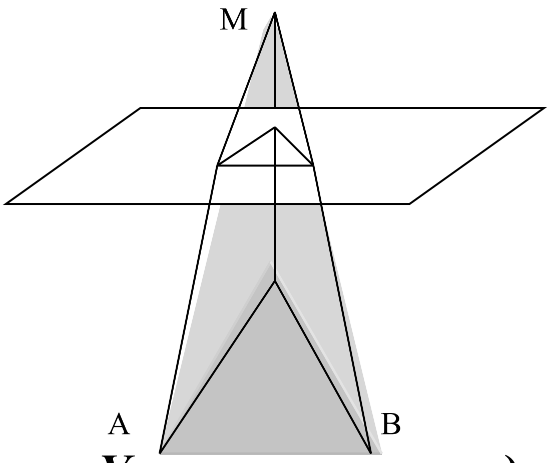
По видам пирамиды бывают **правильными, усеченными, многоугольными**.

Правильной называется пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник.

Усеченной называется часть пирамиды, заключенная между её основанием и параллельной ему плоскостью.



Треугольная пирамида



Усеченная пирамида

Площадь боковой поверхности **правильной** пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему (высоту боковой грани).

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

$\mathbf{S}_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \bullet d$ $\qquad$ $\mathbf{S}_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \bullet d$

Объем пирамиды

многоугольная пирамида $\qquad$ *усеченная пирамида*

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \bullet H$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 \bullet S_2} + S_2)$

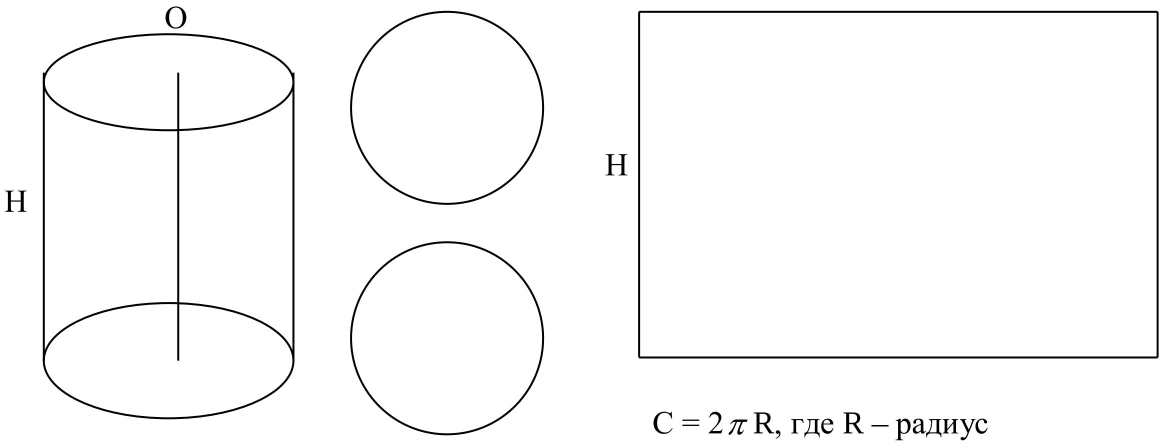
1,2 обозначение верхнего и нижнего оснований усеченной пирамиды соответственно

3.Круглые тела и их свойства.

Цилиндр

Определение: Цилиндром называется геометрическое тело, ограниченное плоскостями двух кругов, параллельных друг другу, и цилиндрической поверхностью. Цилиндрическая поверхность является боковой поверхностью цилиндра.

Разверткой цилиндра на плоскость является прямоугольник или квадрат и два круга



$C = 2\pi R$, где R – радиус основания цилиндра

O_1 $S_{осн} = \pi R^2$

OO_1 - ось цилиндра H- высота цилиндра **OO_1=H**

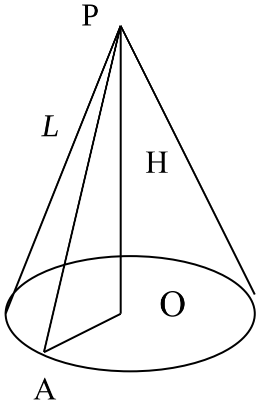
Площадь поверхности и объем цилиндра

$$S_{пов} = 2\pi R(R+H) \qquad \mathbf{V = \pi R^2 H}$$

Конус

Определение: Конусом называется геометрическое тело, ограниченное плоскостью круга и конической поверхностью. Коническая поверхность является боковой поверхностью конуса.

Разверткой конуса на плоскость является круговой сектор и круг.



OP- ось конуса
OP = H

OA- радиус конуса
OA =R

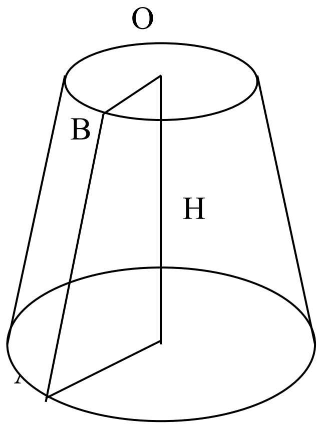
AP- образующая конуса

AP = L

$$\boldsymbol{L}^2 = R^2 + H^2$$

Усеченный конус

Определение: Усеченным конусов называется часть конуса, заключенная между его основанием и плоскостью, параллельной основанию.



AB – образующая AB = L

OM – высота (ось) OM = H

OB – радиус верхнего основания
OB = R_1
MA – радиус нижнего основания
MA= R_2

Площадь поверхности и объем конуса

$$\mathbf{S}_{пов} = \mathbf{S}_{осн} + \mathbf{S}_{ьок}$$

$\mathbf{S}_{осн} = \pi\ \mathbf{R}^2$ $\qquad$ $\mathbf{S}_{ьок} = \pi\ \mathbf{R}\ \boldsymbol{L}$ $\qquad$ $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\pi\ \mathbf{R}^2$

Площадь поверхности и объём усеченного конуса

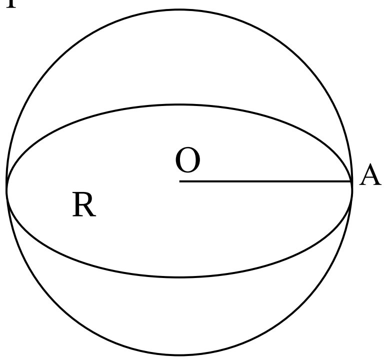
$$\mathbf{S}_{пов} = \pi\ \mathbf{R}_1^{\ 2} + \pi\ \mathbf{R}_2^{\ 2} + \pi\ \mathbf{L}\ (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\pi \mathbf{H}\ (\mathbf{R}_1^{\ 2} + \mathbf{R}_1\ \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2^{\ 2})$$

Шар

Определение: Шаром называется геометрическое тело, состоящее из всех точек пространства удаленных от заданной точки на расстояние не большее радиуса.

Радиусом называется отрезок, соединяющий центр шара с точкой, лежащей на её поверхности.



Площадь поверхности и объём шара

$$\mathbf{S}_{пов} = \mathbf{4}\pi\mathbf{R}^2 \qquad \mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi\ \mathbf{R}^3$$

R - радиус шара

Самостоятельная работа № 9
Тема: «Решение задач на свойства геометрических тел»

1. В прямой треугольной призме стороны основания равны 13, 20, 21 см, а высота призмы равна 25 см. Вычислите площадь сечения призмы проходящего через боковое ребро и меньшую сторону основания.

2. Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с измерениями
12, 16 и 21 см.

3. В правильной четырёхугольной призме диагональ наклонена к боковой грани под углом 30^0. Вычислить угол её наклона к плоскости основания.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 см и 8 см и образуют между собой угол 60^0. Большая диагональ параллелепипеда равна 49 см. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

5. В прямоугольном параллелепипеда боковое ребро равно 12см, площадь диагонального сечения 180 $см^2$, площадь основания 240 $см^2$. Найти стороны основания.

6. Основание прямого параллелепипеда ромб с диагоналями 12 см и 16 см. Диагональ боковой грани равна 26 см. Найти объем параллелепипеда.

7. Основание пирамиды прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см. Каждое боковое ребро равно 26 см. Найти высоту и объём пирамиды.

8. Основания пирамиды равнобедренный треугольник со сторонами 10,10 и 12 см. Боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы 45^0. Найти высоту и объем пирамиды.

9. Основание пирамиды прямоугольник, площадь которого равна 1 $м^2$. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ним углы 30^0 и 60^0. Найти объем пирамиды.

10. Основание прямого параллелепипеда параллелограмм со сторонами 8 см и 32 см и острым углом 30^0 Большая диагональ параллелепипеда равна 40 см. Найти объём параллелепипеда и площадь его поверхности.

11. Основание пирамиды прямоугольный треугольник с катетом 5 см и прилежащим к нему углом 30^0. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Найти объем пирамиды.

12. Стаканчик для мороженого имеет форму конуса, его глубина 12 см, а диаметр верхней части 5 см. В него поместили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Сравнить объёмы стаканчика и мороженого.

13. Сколько кожи пойдет на покрытие футбольного мяча радиуса 10 см. На швы прибавить 10 % от площади поверхности.

14. Радиус основания цилиндра 3 см, а его высота 8 см. Найти длину диагонали осевого сечения и угол её наклона к плоскости основания цилиндра.

15. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 см, а его образующая 24 см. Найти площадь основания и объем цилиндра.

16. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси и отсекающая от окружности основания дугу 60^0. Высота цилиндра 15 см, расстояние от секущей плоскости до оси цилиндра 3 см. Найти площадь сечения.

17. Радиус конуса 5 см, а его высота 12 см. Найти образующую цилиндра, площадь осевого сечения, площадь поверхности и объём конуса.

18. Найти объём конуса, если его высота 3 см, а радиус 1,5 см.

19. Найти высоту конуса, если его радиус 4 см, а объём 48π см^3.

20. Найти площадь поверхности и объём шара радиуса 4 см.

21. Найти радиус шара и площадь поверхности, если его объем равен 113,04 см^3.

22. Найти радиус шара и его объём, если площадь поверхности шара равна 64π см^2.