**Объем и его измерения. Интегральная формула объема.**

## 

﻿**Объём тела** это положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими **основными свойствами**:

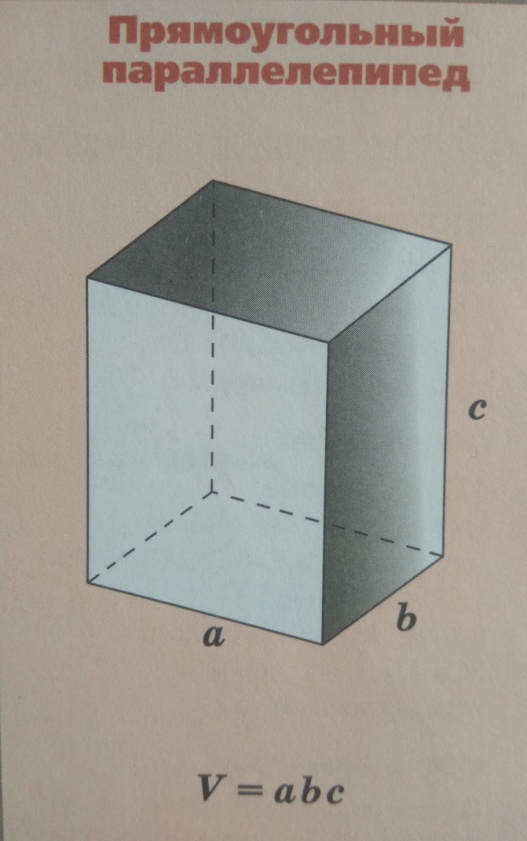
* равные тела имеют равные объемы; при параллельном переносе тела его объем не изменяется;
* если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;
* за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;



**Следствие**

Возьмём куб с объёмом, принятым за единицу измерения объёма. Его ребро равно единице измерения длины отрезков. Выберем три ребра, сходящиеся к одной вершине. Разобьём каждое из этих рёбер на n равных частей (n - произвольное целое число, в случае кубика Рубика n равно трём) и проведём через точки разбиения каждого плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Весь куб разобьётся на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/44911e3d-3e85-42cc-b078-f610430afb1a.pngравных маленьких кубов с ребром https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/6d8b9113-b258-4746-aa0b-3c1db3ab4534.png. Так как объём исходного куба равен одному, то объём каждого маленького куба будет равен https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/d341877d-3687-4d7e-bd3f-86315482faaf.png.

Этот факт нам понадобится при выводе теоремы об объёме прямоугольного параллелепипеда.



**Теорема**

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

**Доказательство**

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a,b,c , его объём буквой V, и докажем, что https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/be918301-3e67-44da-830b-31a039ad40b6.png.

Могут представиться два случая.

**Первый случай**

Измерения а, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/0c39010f-56f1-4c79-be6d-613046806dd3.png). В этом случае числа https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/44a65b70-d362-49e9-bb62-b2392583e6e4.png, https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/9633fc20-c9b3-48b9-b86e-12190f88774c.png , https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/21a40f40-b795-4465-99f3-056ab484dfba.png являются целыми. Разобьём каждое ребро параллелепипеда на равные части длины https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/241e9e69-1bfe-4d26-a2ab-2b07bc909a80.pngи через точки разбиения проведём плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьётся на https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/50175bb6-0677-4871-9213-9367e76ea1ce.png равных кубов с ребром https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/aca9b0b1-b7cb-4240-86e4-470f4ef41a46.png. Так как объём каждого куба равен https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/7dd78230-0c9d-4bfd-a747-0450b6dfebc9.png , что мы доказали ранее, то объём всего параллелепипеда P равен https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/b246b41c-97e1-4d5b-b88a-4b0b1b28af9f.png , что и требовалось доказать.

**Второй случай**

Хотя бы одно из измерений а, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби an, bn, cn которые получаются из чисел а, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с n+1. Очевидно, https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/cb196c19-a73f-4d24-a543-8604eb52cfbf.png , где https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/dce97198-e786-47e3-bc68-80dcb35032db.png , и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/491def1c-72c9-4758-b6dd-334a089281f1.png , где https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/2a7a2495-c0b3-492a-8838-2d3b95c7d2e3.png , https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/d67c674f-f2cd-4c1f-ade4-9ce30798472f.png.

По доказанному в первом случае левая часть неравенства представляет собой объём https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/ed4a6f68-a47a-4154-b8a7-0b66cf2eda24.png прямоугольного параллелепипеда https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/992a3941-fdf5-46a6-83df-5bd7c7b28db5.png с измерениями https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/ec2e8da5-beab-4d2c-8098-98405aecb686.png , https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/ec5e7737-a6ca-4479-b87a-f42c4bb0938a.png , https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/b09a2b72-5579-40da-9ca3-b885c4ea68fc.png , а правая часть это объём https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/8a743c0e-9563-406b-bbf8-e0eabd12016a.png прямоугольного параллелепипеда https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/bb0a3692-5647-4388-b0be-93794b29715e.png с измерениямиhttps://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/bc957592-a933-4969-ae37-b250dd91603d.png , https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/d8ae8991-9fad-43a6-b6c1-58ef70c9ff19.png ,https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/b690d5ef-96a0-47d9-b9cf-c506bbd4ad79.png . Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/503b475e-d50f-4d2e-89f1-842f079cdba7.png , а сам содержится в параллелепипеде https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/3efa9892-cb44-4a7f-857e-a764d171dc6b.png , то объём V параллелепипеда P заключён между https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/fc8b4113-65c9-45aa-8869-9e26dec9f4c5.png и https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/e6ad03ae-3fd1-4666-aabb-eff1ca8ad764.png . Будем неограниченно увеличивать n. Тогда https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/1a0cafdf-d5bf-4add-9dd9-5a411ae87e57.png будет становиться сколь угодно малым, и поэтому https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/94f034c1-20ef-4327-b091-71b304bc9470.png будет сколь угодно мало отличаться от числа https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/095c4696-5f72-4de6-b716-1c64ecb99dd9.png . Отсюда следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/fdaae31a-b32c-40e0-9af1-999aaa56255c.png , а значит они равны. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/b58fa95b-7dfc-4591-8797-b01b68897736.png, что и требовалось доказать.

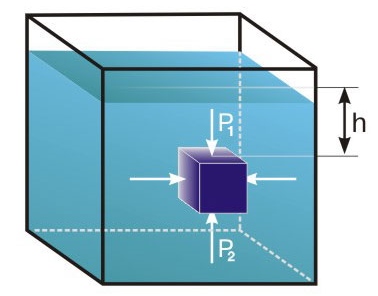
Очень важным следствием данной теоремы является другая форма записи для объёма параллелепипеда, если мы рассмотрим его как одну из разновидностей призмы.

**Следствие**

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

**Докажем**

В самом деле, примем грань с рёбрами a и b за основание. Тогда площадь https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/18651ba1-1102-4d34-846e-ab1e86b15469.png, высота h параллелепипеда равна c. Следовательно, https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/529c81be-7139-46b2-bf33-7143fba957a8.png .



Свойство жидкости заполнять резервуар в нижней части позволяет также измерять объём твёрдых тел, используя метод погружения тела в жидкость и измеряя увеличение уровня жидкости в резервуаре с прямоугольным дном и вертикальными стенками. Проводя измерения объёма тела сложной формы, Архимед пришёл к открытию своего знаменитого «Закона Архимеда». Действительно, при погружении в жидкость, тело вытесняет ровно столько жидкости, каков объём самого тела.

Данное следствие нам очень пригодится при изучении формулы вычисления объёма призм и цилиндра.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля.**

Объём раствора в гальванической ванне равен Vкуб.м, при этом уровень раствора достигает H см. В ванну погрузили деталь, после чего уровень раствора поднялся на h см. Поставьте в соответствие размеры гальванической ванны и деталь, которая в неё погружается.

Таблица 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер ванны | V ванны | Н раствора |
| 1 | 1 | 50 |
| 2 | 2 | 50 |
| 3 | 3 | 50 |
| 4 | 6 | 75 |
| 5 | 10 | 200 |

Таблица 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер детали | h уровня | V детали |
| 1 | 3 | 0,12 |
| 2 | 5 | 0,1 |
| 3 | 12 | 0,6 |
| 4 | 20 | 1,2 |
| 5 | 25 | 2,0 |

Для того, чтобы определить какую деталь в какую ванну погружали необходимо определить площадь дна каждой ванны , а затем определить какую площадь дна имела ванна, в которую погружали деталь.

Дополним таблицу ещё одним столбцом , определяя площадь дна ванны по формуле https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/505f7f20-7aa3-4c14-b224-eadb127a8e7d.png

Таблица 3.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер ванны | V ванны, м3 | Н раствора , см | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/5f70d5ab-17f2-41d7-9770-d591337f8f41.png , м2 |
| 1 | 1 | 50 | 2 |
| 2 | 2 | 50 | 4 |
| 3 | 3 | 50 | 6 |
| 4 | 6 | 75 | 8 |
| 5 | 10 | 200 | 5 |

Таблица 4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер детали | h уровня, см | V детали, м3 | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/0178d507-8c88-4b62-a31c-dcb664cacd44.png , м2 |
| 1 | 3 | 0,12 | 4 |
| 2 | 5 | 0,1 | 2 |
| 3 | 12 | 0,6 | 5 |
| 4 | 20 | 1,2 | 6 |
| 5 | 25 | 2,0 | 8 |

Из сопоставления данных о площади дна ванн делаем вывод и ставим в соответствие:

1 деталь – 2 ванна

2 деталь – 1 ванна

3 деталь – 5 ванна

4 деталь – 3 ванна

5 деталь – 4 ванна

№1. Решите задачу

Дан прямоугольный параллелепипед ABMQDCNP так, что М совпадает с началом координат, N лежит на оси абсцисс, B на оси ординат, Q на оси аппликат. Вершина D имеет координаты (8;6;3). Задано несколько точек, одна из которых О1находится внутри параллелепипеда. Координаты (9;1;2) (7;4;2) (4;-1;5) (4;5;4) . Определите какие координаты у О1, остальные игнорируйте. Определите объём всех восьми параллелепипедов, которые образуются при разбиении тремя плоскостями, проходящими через O1и параллельно граням параллелепипеда.

**Решение**

На первом шаге необходимо определить, какая из четырёх точек находится внутри параллелепипеда. Координаты этой точки по абсциссе, ординате и аппликате не должны быть меньше соответствующих координат вершины М и не должны быть больше соответствующих координат вершины D. Этим критериям соответствует точка с координатами (7;4;2) . Очевидно это и есть точка О1.Далее вычисляем объём всех восьми образовавшихся параллелепипедов, оперируя координатами вершин с самым маленьким и с самым большим значением по всем трём осям каждого параллелепипеда. Разность между соответствующими координатами вдоль оси абсцисс, оси ординат и оси аппликат будет определять размеры рёбер вдоль этих трёх осей. Перемножая эти величины, получаем объём всех восьми малых тел. В качестве проверки сложим все восемь объёмов. В результате должны получить на основании свойства объёмов объём исходного параллелепипеда.

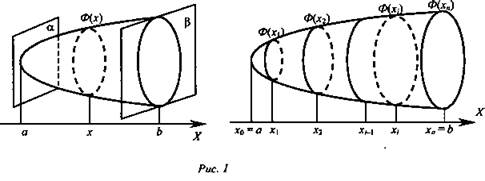
1. При вершине М = 7\*4\*2= 56
2. При вершине B = 7\*(6-4)\*2= 28
3. При вершине Q = 7\*4\*(3-2)= 28
4. При вершине N = (8-7)\*4\*2= 8
5. При вершине A = 7\*(6-4)\*(3-2)= 14
6. При вершине C = (8-7)\*(6-4)\*2= 4
7. При вершине P = (8-7)\*4\*(3-2)= 4
8. При вершине D = (8-7)\*(6-4)\*(3-2) = 2

Исходный параллелепипед имеет объём 56+28+28+8+14+4+4+2=144,

Что соответствует исходным данным https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/d01b773b-1824-40b0-baae-f6162325dada.png . Объёмы малых тел, полученных при разбиении, определены верно. На смежном графе должна отобразиться ломаная линия в форме цифры пять.

Вывод формулы для вычисления объемов тел, основанной на понятии интеграла

1) Пусть тело Т, объем которого надо вычислить, заключено между двумя параллельными плоскостями α и β. Введем систему координат: - ось ох перпендикулярна α и β; а и b - абсциссы точек пересечения оси ох с этими плоскостями (а < b).



Считаем, что сечение Ф(х) плоскостью, проходящей через точку с абсциссой х и перпендикулярно к оси ох, является кругом, либо многоугольником для любого х ∈ [а, b] (при а = х и b = х в сечение может вырождаться точка, например, при х = а).

2) Пусть S(x) - площадь Ф(x), зависимости S(x) - непрерывная функция на числовом отрезке [а, b]. Разобьем отрезок [а, b] на n равных отрезков точками https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1859.jpg и через точки с абсциссами xi проведем плоскости, перпендикулярные ох. Они разобьют тело Т на n тем: Т1...,Тn; - если сечение Ф(xi) - круг, то https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1860.jpg с основанием Ф(xi) и высотой https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1861.jpg - если Ф(xi) - многоугольник, то https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1862.jpg с основанием Ф(xi) и высотой Δxi. В любом случае: https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1863.jpg https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1864.jpg

Приближенное значение Vn объема тела Т точнее с увеличением n и уменьшением Δxi.

3) Причем https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1865.jpg

С другой стороны: сумма Vn - интегральная сумма для непрерывной функции S(x) на числовом отрезке [а, b].

https://compendium.su/mathematics/geometry11/geometry11.files/image1866.jpg

Изучить теоритический материал.

1. Геометрия10 – 11кл. Л.С.Атанасян - М.:Просвещение 2019

Домашнее задание: п.52, п.56-59, №441

задания для проверки присылайте на электронную почту:

[asd20022006@yandex.ru](mailto:asd20022006@yandex.ru)