**Элементы теории вероятностей и математической статистики.**

**Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей.**

<https://function-x.ru/probabilities2.html>

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image002.gif или http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004.gif *(без разницы какого)*,  равна сумме вероятностей этих событий:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image006.gif

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image008.gif и http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image010.gif:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image012.gif

вспомним [**алгебру событий**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html): сложение событий означает появление **хотя бы одного** из суммируемых событий, и, поскольку события в данном случае НЕсовместны, то **одного и только одного** из этих событий (безразлично какого).

Следует отметить, что для совместных событий равенство http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image006_0000.gif будет **неверным**.

Возьмём игральный кубик с [**полной группой событий**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image014.gif, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image016.gif – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image018.gif *(выпадет 5****или****6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image020.gif – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image022.gif, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image024.gif

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image026.gif и так далее.

С помощью рассматриваемой теоремы можно решить и некоторые задачи, которые нам встретились на практикуме по [**классическому определению вероятности**](http://mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html).

Например: *«Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?»*

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image028.gif *(количество всех возможных*[***сочетаний***](http://mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf)*трёх вопросов)*, затем вычислили http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image030.gif количество благоприятствующих исходов и вероятность http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image032.gif того, что студент сдаст экзамен.

Но здесь вместо [**правила сложений комбинаций**](http://mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html), рассмотрим два несовместных события:  
  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image002_0000.gif – студент ответит на два вопроса из трёх;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0000.gif – студент ответит на все три вопроса.

Теперь, пользуясь [**классическим определением**](http://mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), найдём их вероятности:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image036.gif

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image038.gif *(ответ на 2 вопроса из 3****или****на все вопросы)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image040.gif – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен.

Задача 1

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

**Решение**:всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

В данной задаче удобнее воспользоваться «быстрым» способом оформления без расписывания событий большими латинскими буквами. По классическому определению:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image042.gif  – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image044.gif  – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image046.gif – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

**Ответ**: 0,55

Задача 2 *(Решите самостоятельно)*

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

**Зависимые и независимые события**

События являются ***независимыми***, если вероятность наступления **любого из них** не зависит от появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).

**Теорема умножения вероятностей независимых событий**: вероятность совместного появления независимых событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image002_0002.gif и http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0002.gif равна произведению вероятностей этих событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image048.gif

Рассмотрим как подбрасываются две монеты и следующим событиям:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image050.gif – на 1-й монете выпадет орёл;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image052.gif – на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image054.gif (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл *– вспоминаем, как читается*[***произведение событий***](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)*!)*. Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image050_0000.gif и http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image052_0000.gif независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image056.gif

Аналогично:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image058.gif – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image060.gif – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й решка;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image062.gif – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-й орёл.

Заметьте, что события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image064.gif образуют [**полную группу**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) и сумма их вероятностей равна единице: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image066.gif.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на большее количество независимых событий, так, например, если события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image068.gif независимы, то вероятность их совместного наступления равна: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image070.gif. Потренируемся на конкретных примерах:

Задача 3

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

**Решение**: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image072.gif – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image074.gif – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image076.gif – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image078.gif – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь****и****из 2-го стандартная****и****из 3-го стандартная)* выражается произведением http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image080.gif.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image082.gif  – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

**Ответ**: 0,504

Задача 4*(Решите самостоятельно)*

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

**Задачи на теоремы сложения вероятностей несовместных  
и умножения вероятностей независимых событий**

Задача 5

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;  
б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

**Решение**: вероятность попадания/промаха одного стрелка, очевидно, не зависит от результативности другого стрелка.

Рассмотрим события:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image095.gif – 1-й стрелок попадёт в мишень;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image097.gif – 2-й стрелок попадёт в мишень.

По условию: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image099.gif.

Найдём вероятности противоположных событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image101.gif – того, что соответствующие стрелки промахнутся:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image103.gif

а) Рассмотрим событие: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0005.gif – только один стрелок попадёт в мишень. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:

1-й стрелок попадёт **и**2-й промахнётся  
**или**  
1-й промахнётся **и** 2-й попадёт.

На языке [**алгебры событий**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) этот факт запишется следующей формулой:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image106.gif

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image108.gif  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image110.gif – вероятность того, что будет только одно попадание.

б) Рассмотрим событие: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image010_0000.gif – хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Прежде всего, ВДУМАЕМСЯ – что значит условие «ХОТЯ БЫ ОДИН»? В данном случае это означает, что попадёт или 1-й стрелок (2-й промахнётся) **или** 2-й (1-й промахнётся) **или** оба стрелка сразу – итого 3 несовместных исхода.

**Способ первый**: учитывая готовую вероятность предыдущего пункта, событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image010_0001.gif удобно представить в виде суммы следующих несовместных событий:

попадёт кто-то один *(событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0006.gif, состоящее в свою очередь из 2 несовместных исходов)* **или**  
попадут оба стрелка – обозначим данное событие буквой http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image114.gif.

Таким образом: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image116.gif

По теореме умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image118.gif – вероятность того, что 1-й стрелок попадёт **и** 2-й стрелок попадёт.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image120.gif  – вероятность хотя бы одного попадания по мишени.

**Способ второй**: рассмотрим противоположное событие: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image122.gif – оба стрелка промахнутся.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image124.gif

В результате: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image126.gif

Особое внимание обратите на второй способ – в общем случае он более рационален.

**Ответ**: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image139.gif

Cократим запись:

**Решение**: по условию: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image141.gif, http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image143.gif – вероятность попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промаха:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image145.gif

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image147.gif – вероятность того, что только один стрелок попадёт в мишень.

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image149.gif – вероятность того, что оба стрелка промахнутся.

Тогда: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image151.gif – вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

**Ответ**: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image139_0000.gif

На практике можно пользоваться любым вариантом оформления. Конечно же, намного чаще идут коротким путём, но не нужно забывать и 1-й способ – он хоть и длиннее, но зато содержательнее – в нём понятнее, *что, почему и зачем* складывается и умножается. В ряде случаев уместен гибридный стиль, когда прописными буквами удобно обозначить лишь некоторые события.

*Решите самостоятельно*

Задача 6

Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих дат­чика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что при пожаре:

а) оба датчика откажут;  
б) оба датчика сработают.  
в) Пользуясь [теоремой сложения вероятностей событий, образующих полную группу](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), найти вероятность того, что при пожаре сработает только один датчик. Проверить результат прямым вычислением этой вероятности *(с помощью теорем сложения и умножения)*.

Задача 7

Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Вероятность того, что цель не поражена после выполнения первым и вторым стрелками по одному выстрелу равна 0,08. Какова вероятность поражения цели вторым стрелком при одном выстреле?

Задача 8

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены:

а) все станки потребуют настройки;  
б) только один станок потребует настройки;  
в) хотя бы один станок потребует настройки.

Задача 9

Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле только из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,6, из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: 1) хотя бы один снаряд попадет в цель; 2) только два снаряда попадут в цель; 3) цель будет поражена не менее двух раз.

Задача 10

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973.

**Домашние задание: §65 - §69, №1123**

<https://rabochaya-tetrad-uchebnik.com/algebra/uchebnik_algebra_10-11_klass_alimov_kolyagin/index.html#prettyPhoto>

1. Математика: алгебра и начала математического анализа.10 -11 классы:учеб. Для общеобразрват. Организаций:базовый и углубленный уровни/Ш.А Алимов и др. – М.:Просвещение, 2019

задания для проверки присылайте на электронную почту:

[asd20022006@yandex.ru](mailto:asd20022006@yandex.ru)