***Практическое занятие.* Решение неравенств.**

<https://shkolkovo.net/catalog/reshenie_neravenstv/racionalnye_metodom_intervalov>

Основные методы решения неравенства.

  Неравенством называется запись, в которой функции соединены знаком (или несколькими знаками) отношения ">", "<", "http://viripit.ru/mate/zmr.gif", "http://viripit.ru/mate/zbr.gif".

  Неравенства, содержащие два знака отношения, называются двойными, три знака отношения — тройными и т.п. Примеры таких неравенств:

 f(x) > g(x),

 f(x) < g(x),

 f(x)http://viripit.ru/mate/zmr.gifg(x),

 f(x)http://viripit.ru/mate/zbr.gifg(x).

 f(x) < h(x) < g(x) это пример двойного неравенства.

  Неравенства f(x) > g(x),   f(x) < g(x),  называются  строгими,   а  неравенства  
f(x)http://viripit.ru/mate/zmr.gifg(x), f(x)http://viripit.ru/mate/zbr.gifg(x) — нестрогими.

  Решением неравенства, называется всякое значение переменой, при котором  данное  неравенство  верно.  Например,   решением  неравенства        f(x) > g(x) является всякое значение переменной x = a, при котором справедливо неравенство  
f(a) > g(a), или функция f(x) при x = a принимает большее значение чем функция g(x).

  Задание "решить неравенство" означает, что требуется найти множество всех его решений. Это множество может оказаться пустым — в случае, когда решений нет. Множество всех решений неравенства будем называть его ответом.

  Неравенство **В** называется следствием неравенства **А**, если всякое решение **А** является решением неравенства **В**. В этом случае используется запись **А**http://viripit.ru/mate/zsled.gif**В.** Два неравенства **А** и **В**называются равносильными (или эквивалентными пишем  
**А**http://viripit.ru/mate/zravns.gif**В** либо **А** ~ **В)**, если их ответы совпадают. Если Аhttp://viripit.ru/mate/zsled.gif**В** и Вhttp://viripit.ru/mate/zsled.gifА, то неравенства А и В эквивалентны.

  Запись нескольких неравенств под знаком фигурной скобки называется системой (число и вид неравенств, входящих в систему, может быть произвольным). Решение системы неравенств есть пересечение решений всех входящих в нее неравенств. Двойное неравенство f(x) < g(x) < h(x) можно записать в виде системы:

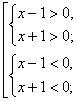
http://viripit.ru/mate/p7101.gif

  Запись нескольких неравенств, объединенных квадратной скобкой, называется совокупностью данных неравенств. Решение совокупности есть объединение решений входящих в нее неравенств.

**Пример 1.** Решить неравенствоhttp://viripit.ru/mate/p7102.gif

 Решение.

  Частное двух чисел положительно в том случае, когда и делимое, и делитель положительны, или они отрицательны. Опираясь на это утверждение составим совокупность двух систем неравенств.



 Сначала решим систему неравенств

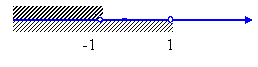
http://viripit.ru/mate/p7104.gif

http://viripit.ru/mate/p7127.gif

  Первая система равносильна неравенству х > 1.

 Теперь, решаем систему неравенств:

http://viripit.ru/mate/p7105.gif



 Вторая система равносильна неравенству x < -1.

  Решение (множество значений переменной обращающих данное неравенство в истинное числовое неравенство) искомого неравенства можно записать несколькими способами:

 1)  x >1 и x < -1.

 2)http://viripit.ru/mate/p7106.gif

  3) xhttp://viripit.ru/mate/zprinad.gif(-http://viripit.ru/mate/zbesk.gif; -1)http://viripit.ru/mate/zob.gif(1; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif).

  Сформулируем несколько часто используемых при отыскании решений свойств неравенств, все они уже знакомы Вам.

  1. К обеим частям неравенства можно прибавить одну и туже функцию определенную в ОДЗ данного неравенства. Если f(x) > g(x) и h(x) - любая функция определенная в ОДЗ данного неравенства, то f(x) + h(x) > g(x) + h(x)

   2. Если обе части неравенства умножить на положительную функцию, определенную в ОДЗ данного неравенства (или на положительное число), то получим неравенство, равносильное исходному неравенству:

   если f(x) > g(x) и h(x) > 0, то f(x)h(x) > g(x)h(x)

  3. Если обе части неравенства умножить на отрицательную функцию, определенную в ОДЗ данного неравенства (или на отрицательное число) и знак неравенства изменить на противоположный, то полученное неравенство эквивалентно данному неравенству:

    если  f(x) > g(x) и h(x) < 0, то f(x)h(x) < g(x)h(x)

  4. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Если f(x) > g(x) и m(x) > h(x), то f(x) + m(x) > g(x) + h(x).

  5.Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать  если  f(x) > g(x) и h(x) < m(x), то f(x) - h(x) < g(x) - m(x).

  6. Неравенства одного смысла с положительными частями можно почленно умножать.

   Если f(x) > g(x) > 0 и  m(x) > h(x) > 0 , то   f(x) g(x) > m(x) h(x).

  7. Неравенства, образованные неотрицательными функциями, можно почленно  возводить  в  положительную  степень:

   если f(x) > g(x) > 0 и m > 0, то (f(x))m > (g(x))m.

  Иногда, решая неравенство, приходится переходить к неравенству - следствию, т.е. выполнять неравносильное преобразование (как правило, связанные с расширением ОДЗ): заменить функцию f(x) — f(x) нулем, сократить неравенство f{x)g{x) > f(x)h{x) на общий положительный множитель f{x) и т.п. Решения, найденные в результате этих действий, могут оказаться посторонними. Перед записью ответа их следует "отсечь"посторонние решения.

  Пусть **M** – множество допустимых значений переменной х данного неравенства (ОДЗ). **B** – множество найденных решений неравенства. **A** множество решений данного неравенства. Тогда **A = Bhttp://viripit.ru/mate/zper.gifM.**

**Пример 2**.Решить неравенствоhttp://viripit.ru/mate/p7107.gif(1). .

 Решение.

  Вычтем из обеих частей неравенства функциюhttp://viripit.ru/mate/p7108.gifполучим неравенство 3х > 9.

  Разделим обе части полученного неравенства на положительное число 3 в результате получим x > 3 (2). Выполнив это преобразование, мы заменили неравенство (1) неравенством (2). Эти неравенства не равносильны.(1)http://viripit.ru/mate/zsled.gif(2).

  M = (-http://viripit.ru/mate/zbesk.gif; 8)http://viripit.ru/mate/zob.gif(8; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif)- ОДЗ неравенства (1).

  B = (3; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif) - это решение неравенства (2).

  Найдем множество решений неравенства (1)

 A = Bhttp://viripit.ru/mate/zper.gifM =((-http://viripit.ru/mate/zbesk.gif; 8)http://viripit.ru/mate/zob.gif(8; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif)http://viripit.ru/mate/zper.gif(3; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif) = (3; 8)http://viripit.ru/mate/zob.gif(8; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif),

  Ответ: xhttp://viripit.ru/mate/zprinad.gif(3; 8)http://viripit.ru/mate/zob.gif(8; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif).

**Метод интервалов**

  Метод интервалов часто используют при решения неравенств. Он позволяет свести решение неравенства f(x) > 0 (<, <, >) к решению уравнения f(x) = 0.

 Метод заключается в следующем:

 1.Находится ОДЗ неравенства.

 2.Неравенство приводится к виду f(x) > 0(<, <, >) (т.е. правая часть переносится влево) и упрощается.

 3.Решается уравнение f(x) = 0.

 4.На числовой оМетод интервалов часто используют при решения неравенств. Он позволяет свести решение неравенства f(x) > 0 (http://viripit.ru/mate/zbr.gif, <,http://viripit.ru/mate/zmr.gif) к решению уравнения f(x) = 0.

 Метод заключается в следующем:венство строгое, и закрашенных, если оно нестрогое.

 5.Все точки, отмеченные на ОДЗ и ограничивающие его, разбивают это множество на так называемые интервалы знакопостоянства. На каждом таком интервале определяется знак функции f(х).

 6. Ответ записывается в виде объединения  отдельных  множеств, на  которых f{x) имеет соответствующий знак. Точки, отмеченные закрашеными кружками, в ответ входят, отмеченные пустыми - нет. Точки ОДЗ, являющиеся граничными, включаются (или не включаются) в ответ после дополнительной проверки.

  Метод интервалов основан на том, что непрерывная функция f(x) может изменить знак либо в граничных точках ОДЗ, где она "разрывается", либо проходя через ноль, т.е. в точках, являющиеся корнях уравнения f(x) = 0. Ни в каких других точках перемены знака не происходит.

**Пример 3.** Решить неравенство.http://viripit.ru/mate/p7109.gif

 Решение.

 ОДЗ:http://viripit.ru/mate/p7110.gifоткуда имеем xhttp://viripit.ru/mate/zprinad.gif[-1; 5)http://viripit.ru/mate/zob.gif(5; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif)

 Решим уравнениеhttp://viripit.ru/mate/p7111.gifЧислитель дроби равен 0 при x = -1, это и есть корень уравнения. Отметим найденный корень на чертеже (черным кружком, т.к. неравенство нестрогое), предварительно отметив ОДЗ:

http://viripit.ru/mate/p7112.gif

 Чтобы определить знак на промежутке (-1; 5) возьмем число 0,http://viripit.ru/mate/p7113.gif

 Чтобы определить знак на втором промежутке возьмем число 8,http://viripit.ru/mate/p7114.gif

 Точки 0 и 8 выбирались произвольно, но так, чтобы упростить процесс вычисления каждого значения функции.

 Ответ: (-5; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif).

**Пример 4.** Решить неравенствоhttp://viripit.ru/mate/p7115.gif

 Решение.

 Используя свойство частного и определение квадратного корня делаем вывод, чтоhttp://viripit.ru/mate/p7116.gifоткудаhttp://viripit.ru/mate/p7117.pngОДЗ: xhttp://viripit.ru/mate/zprinad.gif(0; 1)http://viripit.ru/mate/zob.gif(1; 7)http://viripit.ru/mate/zob.gif(7; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif)

 Решим уравнение

http://viripit.ru/mate/p7118.gif

http://viripit.ru/mate/p7119.gif

http://viripit.ru/mate/p7120.gif

http://viripit.ru/mate/p7121.gif

 x = 1.

 На промежутке (0;1) возьмем точку 0,5;

http://viripit.ru/mate/p7123.gif

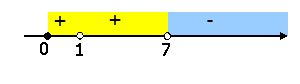
 На промежутке (1; 7) возьмем точку 4,

http://viripit.ru/mate/p7124.gif

 На промежутке (7; +http://viripit.ru/mate/zbesk.gif) возьмем точку 9,

http://viripit.ru/mate/p7125.gif

 Расставим знаки на координатной прямой.



 Таким образом, решением данного неравенства является множество чисел принадлежащих промежутку (0; 1)http://viripit.ru/mate/zob.gif(1; 7)

  Эти примеры наглядно демонстрируют, что промежутки знакопостоянства не обязательно чередуются, процесс определения знака на промежутке может оказаться довольно трудной задачей.

  Полезно запомнить следующее.

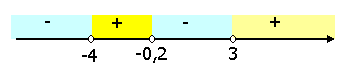
   Если функция представляет собой произведение нескольких не повторяющихся множителей, имеющих вид (ax + b), где a > 0, то знаки функции на промежутках справа на лево чередуются с "плюса" на "минус"... Если какой-то множитель повторяется четное число раз, то при переходе через эту точку смены знака не происходит. В примере №4 Такой точкой была точка 1

**Пример №5.**Решить неравенство (2x - 6)(3x + 12)(5x + 1)<0.

 Решение.

  Нули функции: - 4; - 0,2; 3.

 Функция в левой части неравенства представляет собой произведение не повторяющихся множителей, значит знаки  этой функции чередуются cправа на лево с "+" на "-" ....



 Решение данного неравенства xhttp://viripit.ru/mate/zprinad.gif(-http://viripit.ru/mate/zbesk.gif; -4)http://viripit.ru/mate/zob.gif(-0,2; 3).

**Домашние задание:!!! №1387, №1388(стр.412)**

<https://rabochaya-tetrad-uchebnik.com/algebra/uchebnik_algebra_10-11_klass_alimov_kolyagin/index.html#prettyPhoto>

1. Математика: алгебра и начала математического анализа.10 -11 классы:учеб. Для общеобразрват. Организаций:базовый и углубленный уровни/Ш.А Алимов и др. – М.:Просвещение, 2019

задания для проверки присылайте на электронную почту: [asd20022006@yandex.ru](mailto:asd20022006@yandex.ru)