**Элементы теории вероятностей и математической статистики.**

***Практическое занятие 75*. Сложение и умножение вероятностей.**

<https://function-x.ru/probabilities2.html> -теория, примеры.

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image002.gif или http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004.gif *(без разницы какого)*,  равна сумме вероятностей этих событий:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image006.gif

Аналогичный факт справедлив и для большего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image008.gif и http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image010.gif:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image012.gif

Следует отметить, что для совместных событий равенство http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image006_0000.gif будет **неверным**.

Возьмём игральный кубик с [полной группой событий](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image014.gif, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image016.gif – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image018.gif *(выпадет 5****или****6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image020.gif – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image022.gif, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image024.gif

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image026.gif и так далее.

С помощью рассматриваемой теоремы можно решить и некоторые задачи, которые нам встретились на практикуме по [классическому определению вероятности](http://mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html).

Например: *«Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?»*

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image028.gif *(количество всех возможных*[*сочетаний*](http://mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf)*трёх вопросов)*, затем вычислили http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image030.gif количество благоприятствующих исходов и вероятность http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image032.gif того, что студент сдаст экзамен.

Но здесь вместо [правила сложений комбинаций](http://mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html), рассмотрим два несовместных события:  
  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image002_0000.gif – студент ответит на два вопроса из трёх;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0000.gif – студент ответит на все три вопроса.

Теперь, пользуясь [классическим определением](http://mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), найдём их вероятности:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image036.gif

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image038.gif *(ответ на 2 вопроса из 3****или****на все вопросы)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image040.gif – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен.

**Самостоятельная работа(**10 задач**).**

Задача 1

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Задача 2

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

**Зависимые и независимые события**

События являются ***независимыми***, если вероятность наступления **любого из них** не зависит от появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).

**Теорема умножения вероятностей независимых событий**: вероятность совместного появления независимых событий http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image002_0002.gif и http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0002.gif равна произведению вероятностей этих событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image048.gif

Рассмотрим как подбрасываются две монеты и следующим событиям:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image050.gif – на 1-й монете выпадет орёл;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image052.gif – на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image054.gif (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл *– вспоминаем, как читается*[*произведение событий*](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)*!)*. Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image050_0000.gif и http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image052_0000.gif независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image056.gif

Аналогично:  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image058.gif – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image060.gif – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й решка;  
http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image062.gif – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-й орёл.

Заметьте, что события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image064.gif образуют [полную группу](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) и сумма их вероятностей равна единице: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image066.gif.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на большее количество независимых событий, так, например, если события http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image068.gif независимы, то вероятность их совместного наступления равна: http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image070.gif. Потренируемся на конкретных примерах:

Задача 3

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Задача 4

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

**Зависимые события**.

Событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image084.gif называют ***зависимым***, если его вероятность http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image086.gif зависит от одного или большего количества событий, которые уже произошли. За примерами далеко ходить не надо – достаточно до ближайшего магазина:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image084_0000.gif – завтра в 19.00 в продаже будет свежий хлеб.

Вероятность этого события зависит от множества других событий: завезут ли завтра свежий хлеб, раскупят ли его до 7 вечера или нет и т.д. В зависимости от различных обстоятельств данное событие может быть как достоверным http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image088.gif, так и невозможным http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image090.gif. Таким образом, событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image084_0001.gif является **зависимым**.

Хлеба… и, как требовали римляне, зрелищ:

http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0003.gif – на экзамене студенту достанется простой билет.

Если идти не самым первым, то событие http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image004_0004.gif будет зависимым, поскольку его вероятность http://mathprofi.ru/n/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei_clip_image093.gif будет зависеть от того, какие билеты уже вытянули однокурсники.

Как определить зависимость/независимость событий?

Иногда об этом прямо сказано в условии задачи, но чаще всего приходится проводить самостоятельный анализ. Какого-то однозначного ориентира тут нет, и факт зависимости либо независимости событий вытекает из естественных логических рассуждений.

**Задачи на теоремы сложения вероятностей несовместных  
и умножения вероятностей независимых событий.**

Задача 5

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;  
б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Задача 6

Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих дат­чика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что при пожаре:

а) оба датчика откажут;  
б) оба датчика сработают.  
в) Пользуясь [теоремой сложения вероятностей событий, образующих полную группу](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), найти вероятность того, что при пожаре сработает только один датчик. Проверить результат прямым вычислением этой вероятности *(с помощью теорем сложения и умножения)*.

Задача 7

Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8. Вероятность того, что цель не поражена после выполнения первым и вторым стрелками по одному выстрелу равна 0,08. Какова вероятность поражения цели вторым стрелком при одном выстреле?

Задача 8

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены:

а) все станки потребуют настройки;  
б) только один станок потребует настройки;  
в) хотя бы один станок потребует настройки.

Задача 9

Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле только из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,6, из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: 1) хотя бы один снаряд попадет в цель; 2) только два снаряда попадут в цель; 3) цель будет поражена не менее двух раз.

Задача 10

Стрелок попадает в цель с одной и той же вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания при трех выстрелах равна 0,973.

**Домашние задание: §65 - §69, №1123**

<https://rabochaya-tetrad-uchebnik.com/algebra/uchebnik_algebra_10-11_klass_alimov_kolyagin/index.html#prettyPhoto>

1. Математика: алгебра и начала математического анализа.10 -11 классы:учеб. Для общеобразрват. Организаций:базовый и углубленный уровни/Ш.А Алимов и др. – М.:Просвещение, 2019

задания для проверки присылайте на электронную почту:

[asd20022006@yandex.ru](mailto:asd20022006@yandex.ru)